CPE 332
Computer Engineering Mathematics II

Part II, Chapter 4 Cont.: Statistical Average

Chapter 5: Random Process

Today Topics

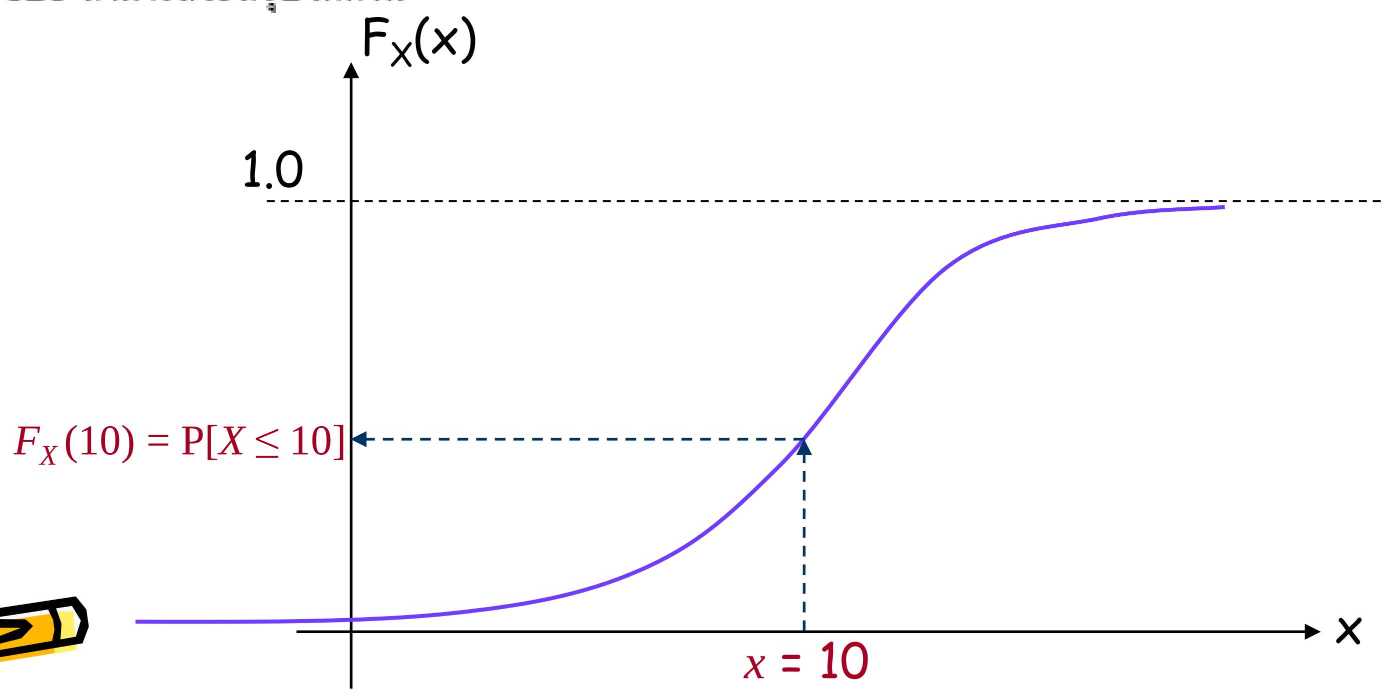
- HW 3 Due/ HW4 Due Next Week
- PDF
- Expectation
- Joint Density
- Correlation/Covariance
- Random Process
- Stationary
- Ergodic

Random Variables

- Mapping ผลลัพธ์เป็นตัวเลข (One-to-One) ดังนั้นผลการทดลองสามารถไปคำนวณต่อได้
  - ที่สำคัญคือค่าเฉลี่ยทางสถิติ
    - Mean
    - Variance
    - Etc.
  - และกราฟแสดงคุณสมบัติ Probability
    - Cumulative Distribution Function (CDF)
    - Probability Density Function (PDF)
  - เมื่อผลลัพธ์ของการทดลอง(Sample Space)ได้ Infinite Set เราได้ Continuous Random Variable
  - เมื่อผลลัพธ์เป็น Finite Set การกำหนดจะใช้ Set ของตัวเลขมักจะเป็น Integer เราได้ Discrete Random Variable

CDF:Cumulative Distribution Function of RV X

ถ้าให้ Function $F_X(x) = P[X \le x]$ และ Plot Graph ระหว่าง $F_X(x)$ vs. x (ซึ่งก็คือ Graph $P[X \le x]$ vs. x) Graph ที่ได้เราเรียกว่า Cumulative Distribution Function หรือ CDF(บางตำราใช้ Probability Distribution Function) ลักษณะของ CDF จะเป็น Graph ที่จะไม่มีการลดค่าเนื่องจากเป็นค่าสะสม โดยจะเริ่มจากศูนย์ และมีค่าสูงสุดเป็นหนึ่ง คุณสมบัติของ CDF สามารถจะสรุปได้ดังนี้



CDF of Normal (Gaussian) Distribution: Continuous

CDF Properties

(1) $0 \le F_X(x) \le 1$

(2) $F_X(x)$ เป็น Non-decreasing Function

(3) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ และ $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

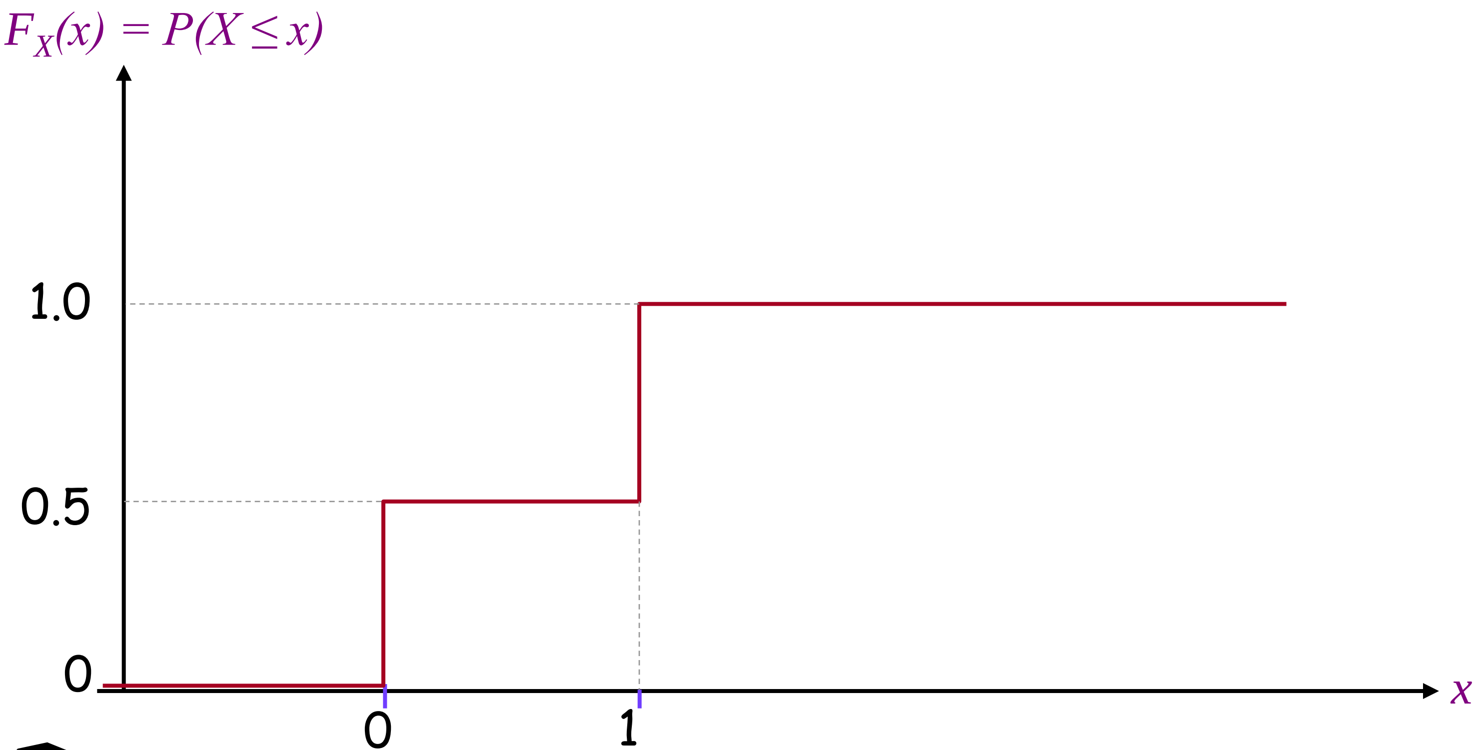
(4) $F_X(x)$ เป็น Function ที่ต่อเนื่องจากทางด้านขวา นั่นก็คือ $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} F_X(x+\varepsilon) = F_X(x)$

(5) $P[a < X \le b] = F_X(b) - F_X(a)$

(6) $P[X = a] = F_X(a) - F_X(a^-)$

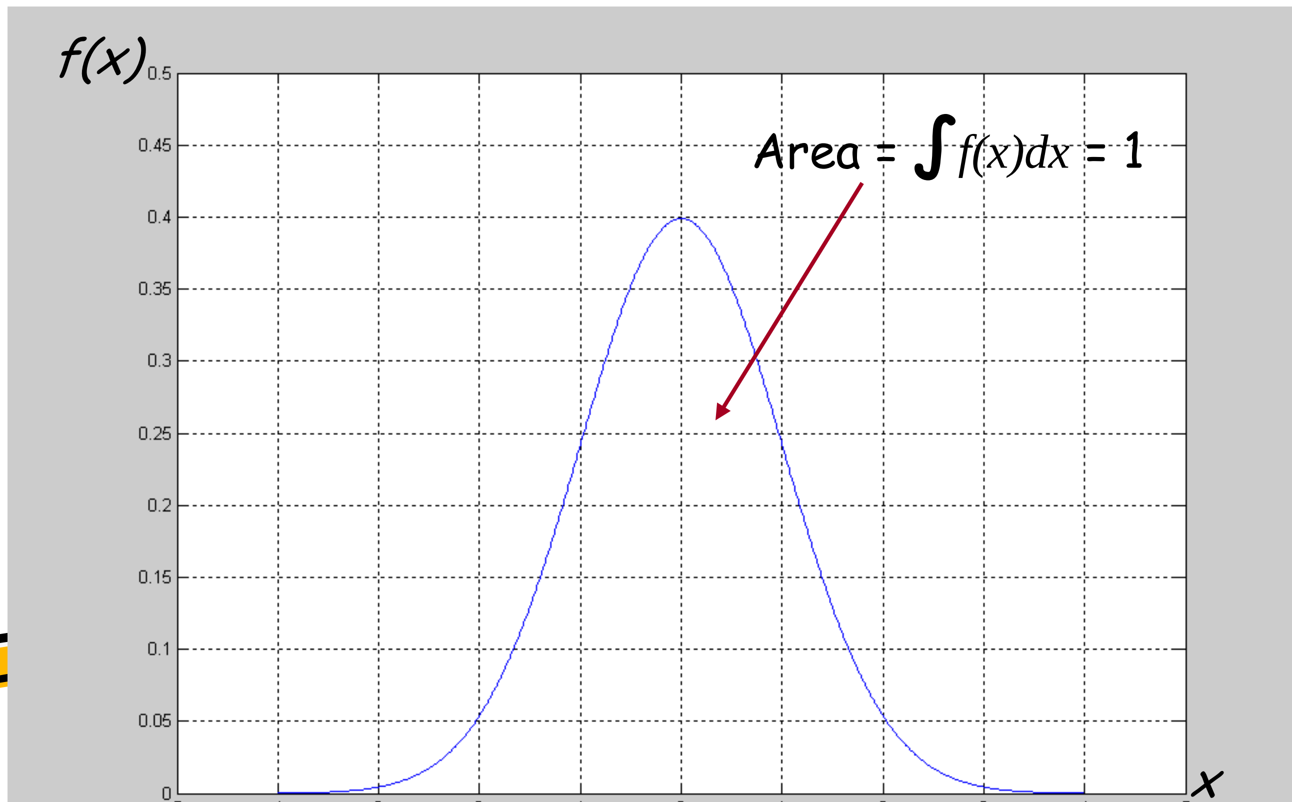
CDF การทอยเหรียญ: Discrete RV

- ให้ "หัว"= 0 และ "ก้อย" = 1



PDF: Probability Density Function

ค่าของการเปลี่ยนแปลงใน CDF หรือ Slope ของมัน เมื่อ Plot กับแกน x เราจะได้ Probability Density Function ($f_X(x)$)หรือ PDF นั่นก็คือ $f_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}$ และ $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x^+} f_X(x)dx$ คุณสมบัติของ PDF มีดังนี้



PDF of Normal(Gaussian) Distribution : Continuous

Properties of PDF

(1) $f_X(x) \geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

(3) $\int_{a^+}^{b^+} f_X(x)dx = P[a < x \leq b)$

(4) $P[X \in A] = \int_{AreaA} f_X(x)dx$

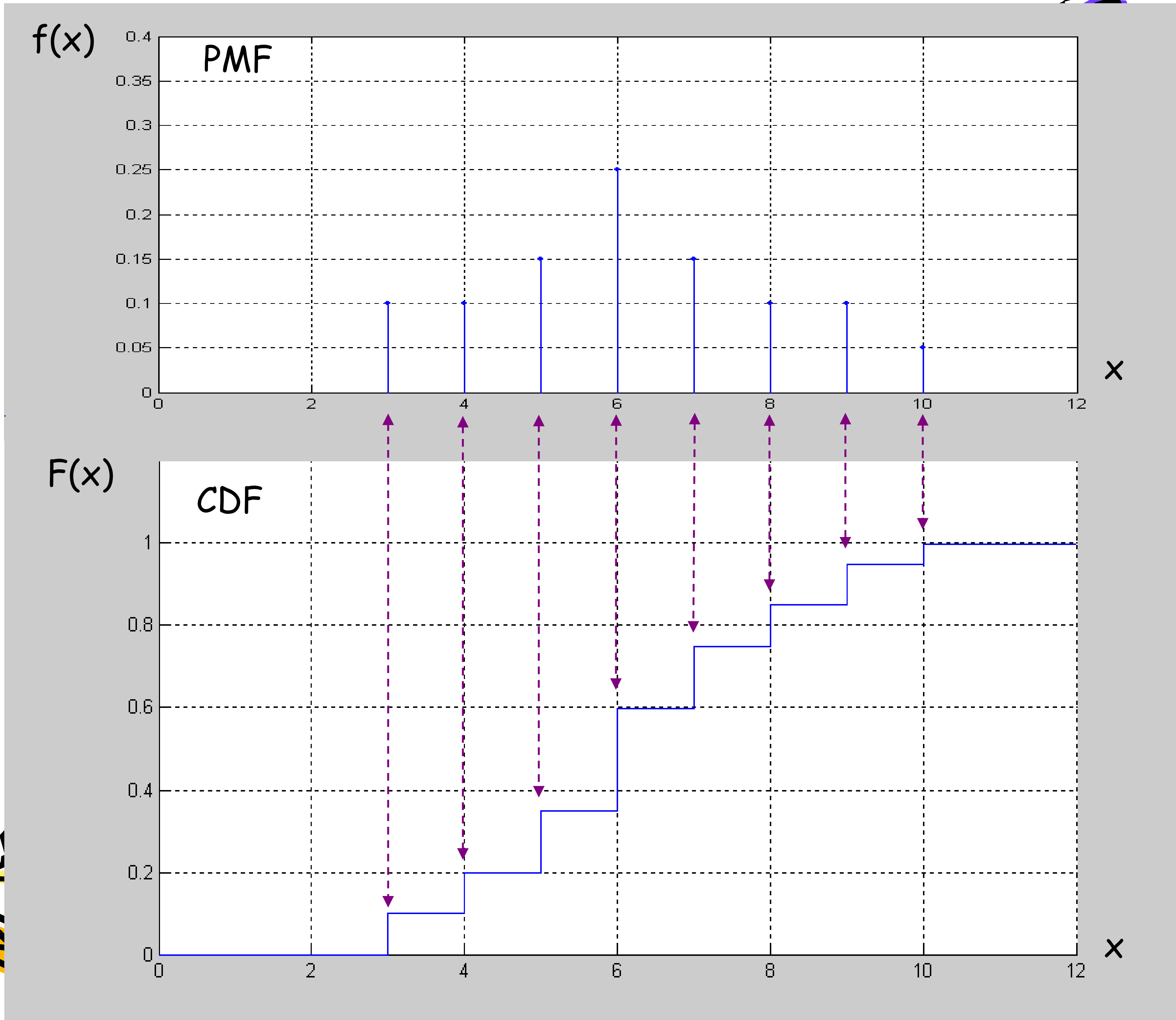
(5) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x^+} f_X(u)du$

ในกรณีของ Discrete Random Variable บางครั้งเราใช้คำว่า Probability Mass Function(PMF) แทน ซึ่งมีนิยามดังนี้

$$PMF = \{P_i\};\, P_i = P[X = x_i]$$

Discrete Version

- ค่าของ Variable ไม่ต่อเนื่อง
  - RV X มีค่าเฉพาะที่ $X=x_i$
- $F(x) = P(X \leq x)$
  - Function นี้มีความต่อเนื่องด้านขวามือ
  - นิยามสำหรับทุกจุดใน Domain ของ x
  - Function เป็นลักษณะขั้นบรรได
  - Monotonic Increasing Function จาก 0 ถึง 1
- $f(x_i) = P(X = x_i)$
  - นิยามเฉพาะจุด ไม่ต่อเนื่อง ค่าเป็นศูนย์ระหว่างนั้น
  - บางทีเรียก Probability Mass Function
  - $\sum f(x_i)=1$ เสมอ


f(x)
PMF
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0 2 4 6 8 10 12
x
F(x)
CDF
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0 2 4 6 8 10 12
x

Statistical Average

Random Variable สามารถที่จะอธิบายได้ด้วย PDF ของมัน แต่การแสดง PDF ของ RV บ่อยๆครั้งไม่จำเป็นและไม่เหมาะสม ยิ่งไปกว่านั้น ในปกติแล้ว การหา PDF ของ RV นั้นทำไม่ได้ง่ายๆ ดังนั้นเรามักจะแสดงคุณสมบัติของมันจากค่าเฉลี่ยทางสถิติซึ่งเราเรียกว่า **Expectation** หรือการคาดคะเนทางสถิติของมัน

ถ้ากำหนดให้ Function ของ RV X คือ $g(X)$ เราสามารถหา Expectation ของ $g(X)$ ได้จาก

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(X) f_X(x)\,dx$$

พึงสังเกตไว้อย่างหนึ่งก็คือ Expectation หรือ $E[\cdot]$ เป็น Linear Operation นั่นก็คือ $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$ นอกจากนี้แล้วเรายังได้ $E[C] = C$ และ $E[kX] = kE[X]$ โดยที่ C, k เป็นค่าคงที่

Discrete Version :

$$E[g(X)] = \sum_{\forall x_i \in X} g(x_i)\, p(x_i)$$

Importance Expectation

4.7.1 Mean (m_X หรือ μ_X หรือ $\overline{X}$) คือเมื่อ $g(X) = X$ เราได้ $E[X] = \overline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} Xf_X(x)dx$

4.7.2 Mean Square ($\overline{X^2}$) หรือ Second Moment นั่นก็คือ $g(X) = X^2$ และ $E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 f_X(x)dx$

4.7.3 Variance (σ^2) หรือ Second Central Moment มาจาก $g(X) = (X - \overline{X})^2$ และ

$E[(X-\overline{X})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X-\overline{X})^2 f_X(x)dx$ ค่านี้สามารถคำนวณได้จาก Linear Property ของ Expectation ดังนี้

$$\sigma^2 = E[(X-\overline{X})^2] = E[X^2] - E[2\overline{X}X] + E[\overline{X}^2] = \overline{X^2} - \overline{X}^2$$

Discrete Version :

$$E[X] = \sum_{\forall x_i \in X} x_i\, p(x_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i\, p(x_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \mid p(x_i) = \tfrac{1}{N}$$

$$E[X^2] = \sum_{\forall x_i \in X} x_i^2\, p(x_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \mid p(x_i) = \tfrac{1}{N}$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{\forall x_i \in X} (x_i - \mu_X)^2\, p(x_i) = E[X^2] - E[X]$$

- Note:
  - ในกรณีของ Data ที่ได้จากการสุ่มตัวอย่าง เราได้เฉพาะค่า Estimate ของ Mean และ Mean Square เท่านั้น และ

From n Samples : $p(x_i) = \frac{1}{N}$, Each sample has the same probability

$$\hat{\mu}_X = \overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Estimate $E[X^2] = \overline{X^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2$

$\sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]$ from estimation is biased.

We use the least biased formular :

Sample Variance (Estimated) : $V_X^2 = s_{N-1}^2 = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{X})^2\right)$

Multivariate: RV มากกว่า 1 ตัว

- จุดประสงค์ในการศึกษา RV มากกว่าหนึ่งตัวพร้อมๆกัน เพื่อจะหาความสัมพันธ์ระหว่าง RV
  - แสดงโดยกราฟ Joint PDF
  - หรือค่าเฉลี่ยทางสถิติ Correlation และ Covariance
- **กรณีของ Bivariate**
  - เป็นการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง RV สองตัว คือ X และ Y แต่ละตัวอาจเป็น Discrete หรือ continuous
    - เช่นความสัมพันธ์ระหว่างส่วนสูงและอายุ
    - หรือความสัมพันธ์ระหว่างคะแนน Midterm และเกรดปลายเทอม
    - หรือความสัมพันธ์ระหว่าง GPA กับเงินเดือนที่ได้เมื่อจบการศึกษา

Multivariate: RV มากกว่า 1 ตัว

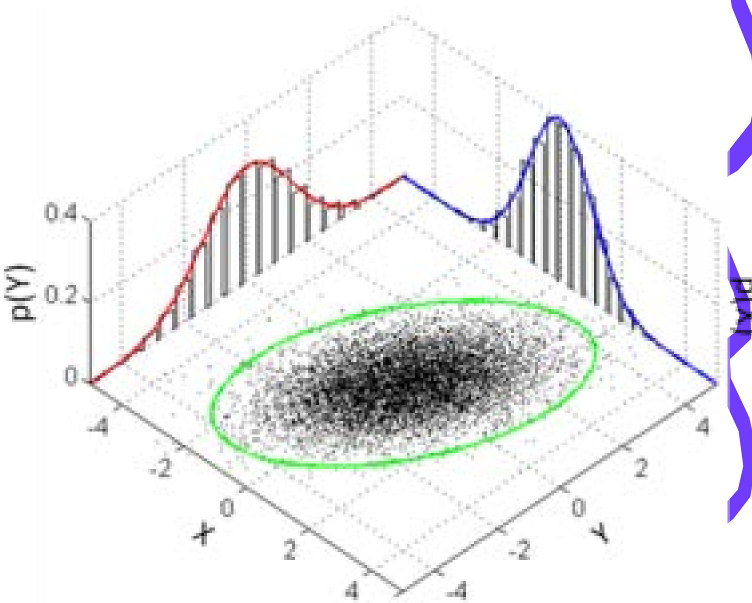
- แต่ละ X และ Y จะมี PDF ของมัน เรียก Marginal PDF บ่งบอกเฉพาะคุณสมบัติของตัวมันเอง ไม่เกี่ยวกับตัวอื่น
  - $f_X(x)$ และ $f_Y(y)$
- Marginal PDF ไม่มีข้อมูลแสดงความสัมพันธ์ของทั้งสอง RV
  - PDF ที่แสดงความสัมพันธ์ของสอง RV จะต้องเป็น Function ของทั้งสอง Variable และต่างจาก PDF แต่ละตัว

Multivariate: RV มากกว่า 1 ตัว

- PDF ที่เป็น Function ของทั้งสอง RV เรียก Joint PDF จะมีข้อมูลแสดงความสัมพันธ์เพิ่มเข้ามา (สำหรับ 2 RV ต้อง Plot แบบ 3D)
  - $f_{XY}(x, y)$ Joint PDF ไม่สามารถหาได้จาก Marginal PDF อย่างเดียว
  - ยกเว้นเฉพาะกรณีพิเศษที่ X และ Y ไม่ขึ้นต่อกันเท่านั้น (Statistical Independent) ที่ทำให้สมการล่างนี้เป็นจริง
    - $f_{XY}(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y)$
- แต่เราสามารถแสดงได้ว่า Marginal Density
    - $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dy$ และ

Joint CDF/Marginal Density

- $F_{XY}(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y] = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$
- Joint PDF จะมี Marginal Density ตาม PDF ของแต่ละ Random Variable
  - $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$
  - $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$



Joint Moment

4.7.4 Joint Moment ในกรณีที่ Random Variable มากกว่าหนึ่งตัว เราได้ Joint Moment $E[g(X,Y)]$ ดังนั้นเรานิยามให้ค่า Expectation ของ Joint Moment เป็นดังนี้

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(X,Y) f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

โดยที่ $f_{X,Y}(x,y)$ คือ Joint Probability Density Function ของทั้งสอง Random Variable สังเกตว่าปกติแล้วการรู้เพียงแต่ PDF ของแต่ละ Variable นั้นจะมีข้อมูลไม่เพียงพอที่จะหา PDF ของ Joint Variable ได้ ยกเว้นในกรณีพิเศษที่ทั้งสอง Random Variable นั้นเป็น Statistical Independent ซึ่งในกรณีนี้เราได้ $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

Correlation

- G(x,y) = XY

4.7.5 Correlation ในกรณี $g(X,Y) = XY$ เราได้ Correlation ของ RV 2 ตัวเรียก Cross Correlation หาได้จาก $E[XY]$ ซึ่งเราเรียกว่า Cross Correlation ของ X และ Y ให้เครื่องหมาย R_{XY} ดังนั้นเราสามารถเขียน

$$R_{XY} = E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} XYf_{XY}(x,y)dxdy$$

ในกรณีของ Statistical Independent เราจะได้ $R_{XY} = E[XY] = E[X]E[Y]$

$$\mathit{Discrete\ Version}: R_{XY} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} x_i y_j p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} x_i y_j p(x_i) p(y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i p(x_i) \sum_{i=1}^{M} y_i p(y_i) \mid independent = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} y_i \mid p(x_i) = \tfrac{1}{N}, p(y_i) = \tfrac{1}{M}$$

Covarience

4.7.6 Covariance ถ้า $g(X,Y)=(X-m_X)(Y-m_Y)$ เมื่อเราทำ Expectation เราได้ Covariance หรือ C_{XY} ดังนั้น

$$C_{XY}=E[(X-m_{X=})(Y-m_Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(X-m_X)(Y-m_Y)f_{XY}(x,y)dxdy$$

$$=E[XY]-m_XE[Y]-m_YE[X]+m_Xm_Y=R_{XY}-m_Xm_Y$$

อีกค่าที่สำคัญก็คือ Correlation Coefficient หรือ ρ ซึ่งก็คือ Normalized Covariance กล่าวคือ

$$\rho=\frac{C_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

Correlation and Covarience

4.7.7 Notes เกี่ยวกับ Correlation

- RV 2 ตัว จะ Uncorrelated ก็ต่อเมื่อ $C_{XY} = 0$
- RV 2 ตัว จะ Orthogonal ก็ต่อเมื่อ $R_{XY} = E[XY] = 0$
- ถ้า X หรือ Y ตัวใดตัวหนึ่งมี Zero Mean และทั้งสองตัว Orthogonal กัน ดังนั้นมันจะ Uncorrelated
- ถ้า RV 2 ตัวเป็น Statistically Independent ทั้งสองตัวจะ Uncorrelated แต่ส่วนกลับจะไม่เป็นจริงเสมอไป ยกเว้นในกรณีที่ทั้งสองตัวเป็น Jointly Gaussian
- ในกรณีที่ $Y = X$ เราได้ $C_{XY} = \sigma_X^2$

การประมาณค่า Rxy และ Cxy จาก Samples

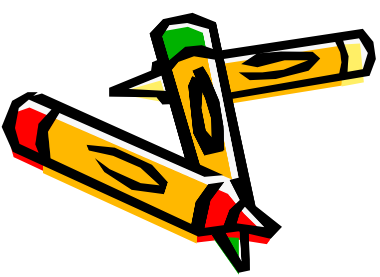
- เราเก็บตัวอย่างเป็นคู่ (x_i, y_i) จำนวน N คู่
- Probability ของการได้แต่ละตัวอย่างเท่ากัน คือ 1/N
- ดังนั้น

$$R_{XY} = E[XY] = \sum_i \sum_j x_i y_j P(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i (\tfrac{1}{N}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

- และ

$$C_{XY} = E[(X - m_X)(Y - m_Y)] = \sum_{i=1}^{N} (x_i - m_X)(y_i - m_Y)(\tfrac{1}{N})$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - m_X)(y_i - m_Y) = R_{XY} - m_X m_Y$$

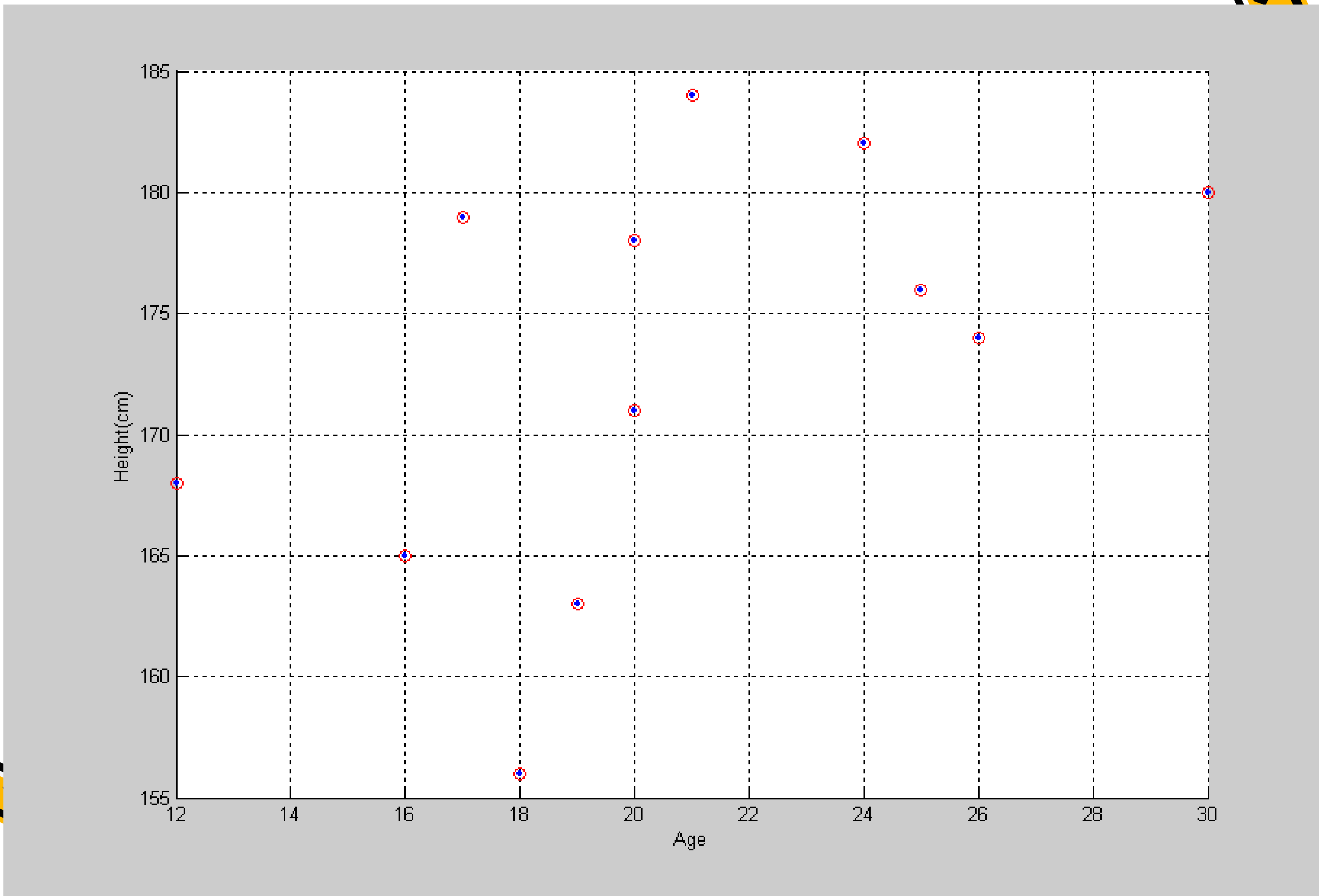


EX.จงหา Rxy และ Cxy จากตัวอย่างในตารางข้างล่าง

- ข้อมูลจากชายไทย อายุระหว่าง 12 - 30 ปี
- X=อายุ และ Y=ส่วนสูง

No.(i)	x_i	y_i	No.(i)	x_i	y_i
1	20	178	7	12	168
2	25	176	8	18	156
3	19	163	9	26	174
4	21	184	10	20	171
5	30	180	11	24	182
6	16	165	12	17	179

Scatter Diagram



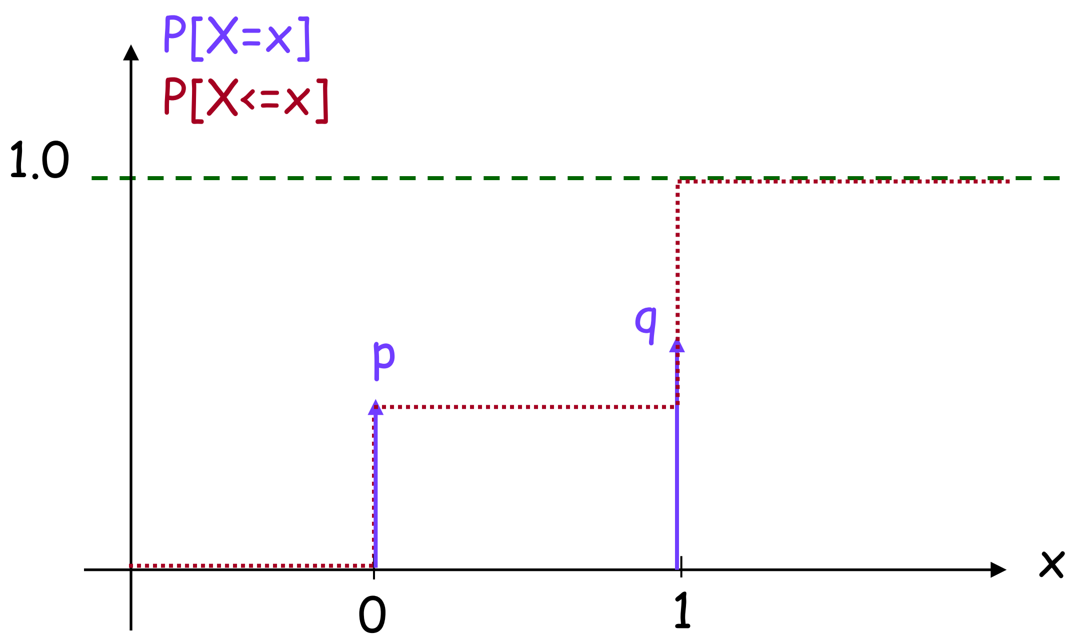
Calculation Table

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	$x_i - m_X$	$y_i - m_y$	$(x_i - m_X)(y_i - m_Y)$
1	20	178	3560	-0.6667	5	-3.3333
2	25	176	4400	4.3333	3	13.0000
3	19	163	3097	-1.6667	-10	16.6667
4	21	184	3864	0.3333	11	3.6667
5	30	180	5400	9.3333	7	65.3333
6	16	165	2640	-4.6667	-8	37.3333
7	12	168	2016	-8.6667	-5	43.3333
8	18	156	2808	-2.6667	-17	45.3333
9	26	174	4524	5.3333	1	5.3333
10	20	171	3420	-0.6667	-2	1.3333
11	24	182	4368	3.3333	9	30.0000
12	17	179	3043	-3.6667	6	-22.0000
$\sum_{i=1}^{12}(.)$	248	2076	43140	0	0	236
Average (N=12)	20.6667	173	$R_{XY} = 3595$	0	0	$C_{XY} = 19.6667$

Notes: เราสามารถคำนวณ $C_{XY} = R_{XY} - m_X m_Y = 3595 - (20.\dot{6})(173) = 19.\dot{6}$

PDF ที่สำคัญ

4.8.1 Bernoulli Trial สมมุติว่าการทดลองมี Outcome ที่เป็นไปได้เพียง 2 แบบ เช่น 0 หรือ 1, ถูก หรือ ผิด, สำเร็จ หรือ ไม่สำเร็จ ลักษณะของการทดลองแต่ละครั้งเหล่านี้เราเรียก Bernoulli Trial โดยถ้าให้ p และ q เป็นค่า Probability ของ Outcome ทั้งสอง เราจะได้ $p+q=1$ หรือ $q=1-p$

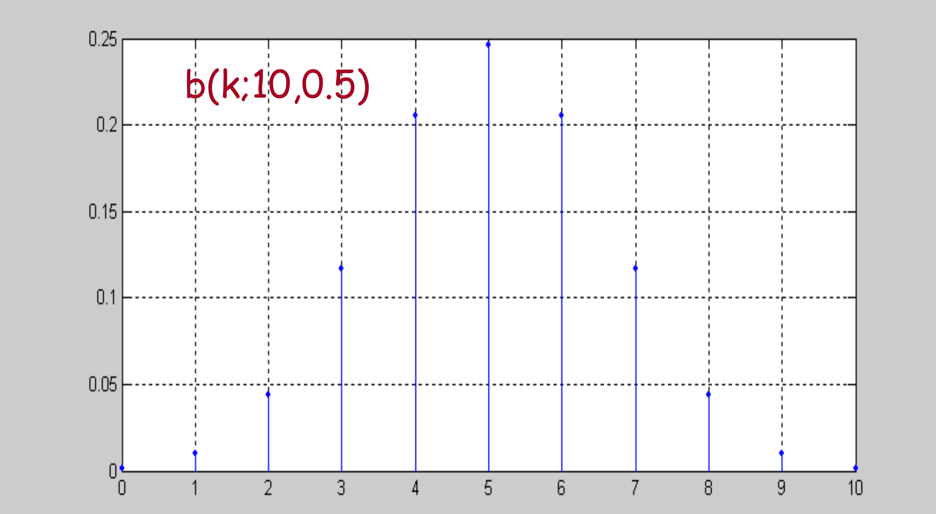


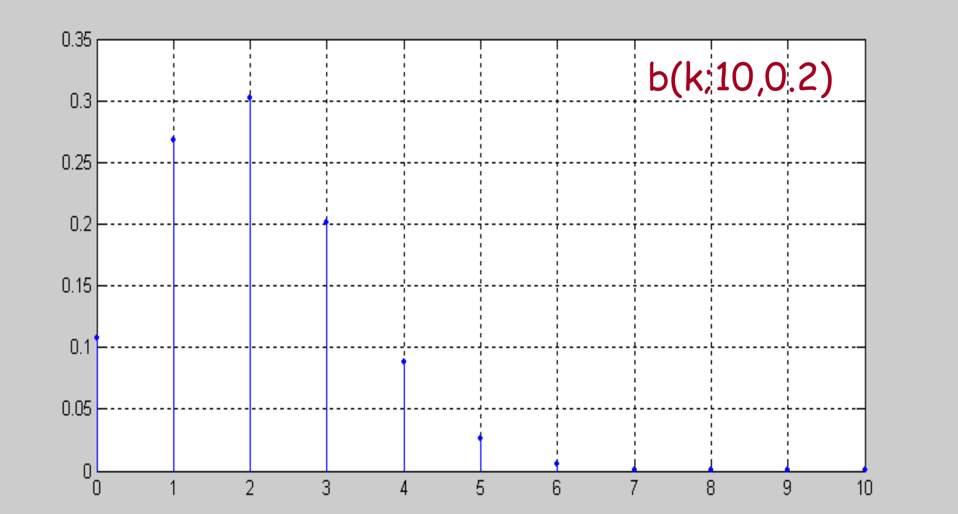
Binomial Distribution

4.8.2 Binomial Distribution มีปัญหาหลายๆแบบสามารถแก้ไขได้จากการหา Probability ที่จะสำเร็จ k ครั้งจากการทำ Bernoulli Trial ทั้งหมด n ครั้ง Probability ที่จะประสพผลสำเร็จเท่ากับ k ครั้งในการทำ Bernoulli Trial ที่ไม่ขึ้นต่อกันทั้งหมด n ครั้ง ที่มีค่า Probability ในการประสพผลสำเร็จแต่ละครั้งเท่ากับ p และไม่สำเร็จ $q=1-p$ จะหาได้จาก $C(n,k)p^k q^{n-k}$ ดังนั้น $p(X=k)=C(n,k)p^k q^{n-k}$ และ $E(X)=np$, $\sigma_X^2=npq$

ค่า Probability ที่จะสำเร็จ k ครั้ง เป็น Function กับ k จัดเป็น Distribution Function ที่สำคัญอันหนึ่งที่เรียก Binomial Distribution, เขียน $b(k;n,p)=C(n,k)p^k q^{n-k}$ สังเกตว่า $\sum_{k=0}^{n} C(n,k)p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$

$$C(n,k)=C_k^n={}^nC_k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

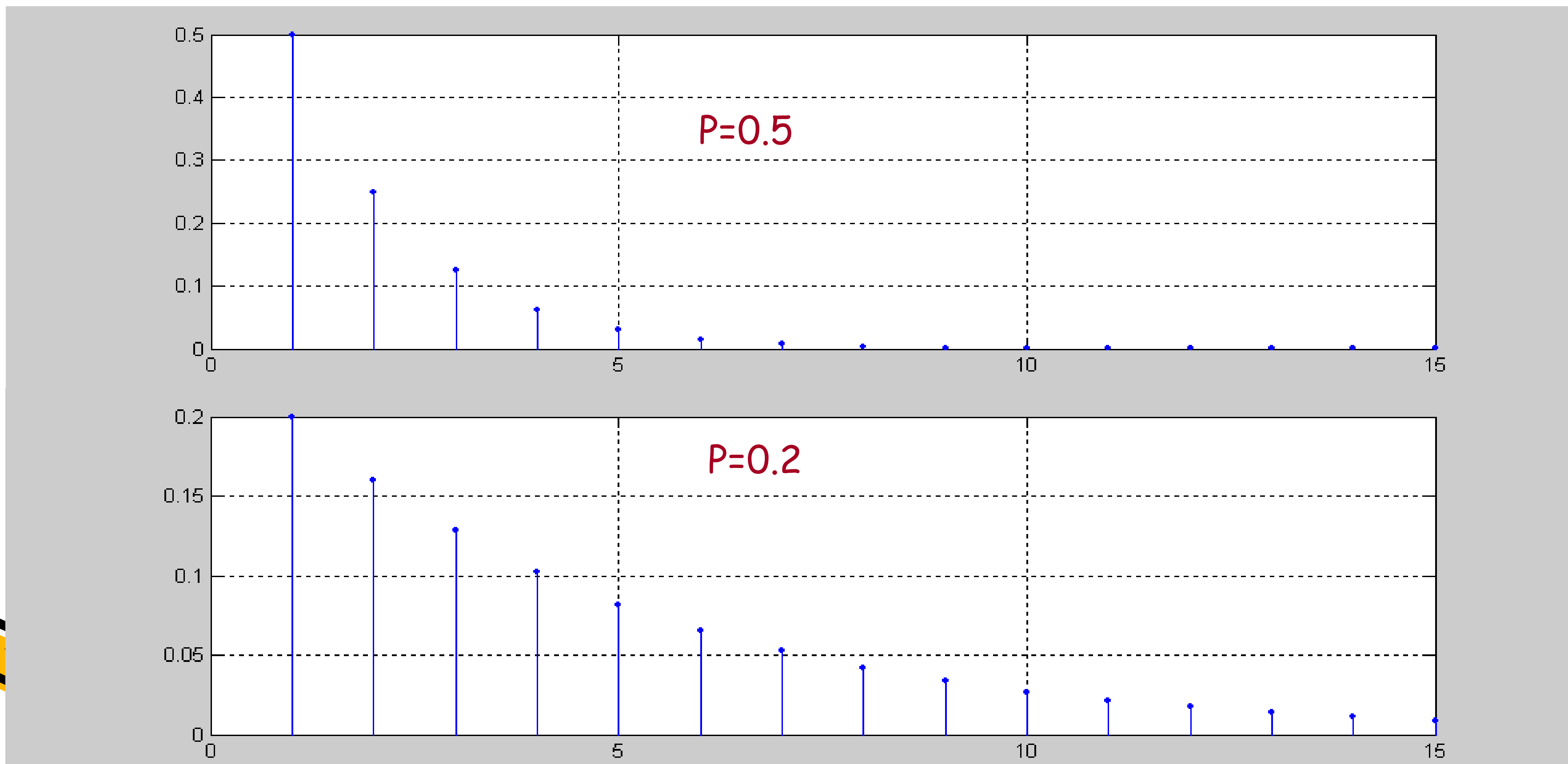




Geometric Distribution

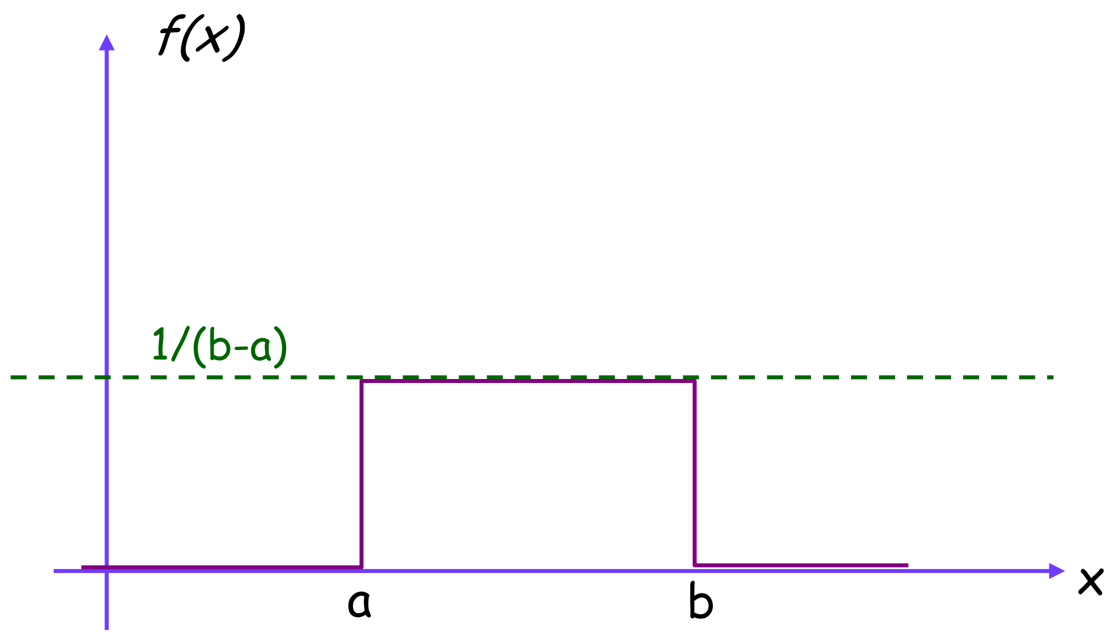
4.8.3 Geometric Distribution Random Variable X จะเป็น Geometric Distribution ด้วย Parameter p ถ้า

$$p(X=k)=(1-p)^{k-1}p \text{ สำหรับค่า } k=1,2,3,\ldots \text{ และค่า } E(X)=\frac{1}{p},\ \sigma_X^2=(1-p)/p^2$$



Uniform Distribution

4.8.4 Uniform Distribution $P(X=k)=1/(b-a)$ ถ้า X อยู่ระหว่าง $[a,b]$ และจะเป็นศูนย์ในกรณีอื่นๆ ในกรณีนี้เราได้ $E(X)=(a+b)/2,\ \sigma_X^2=(b-a)^2/12$



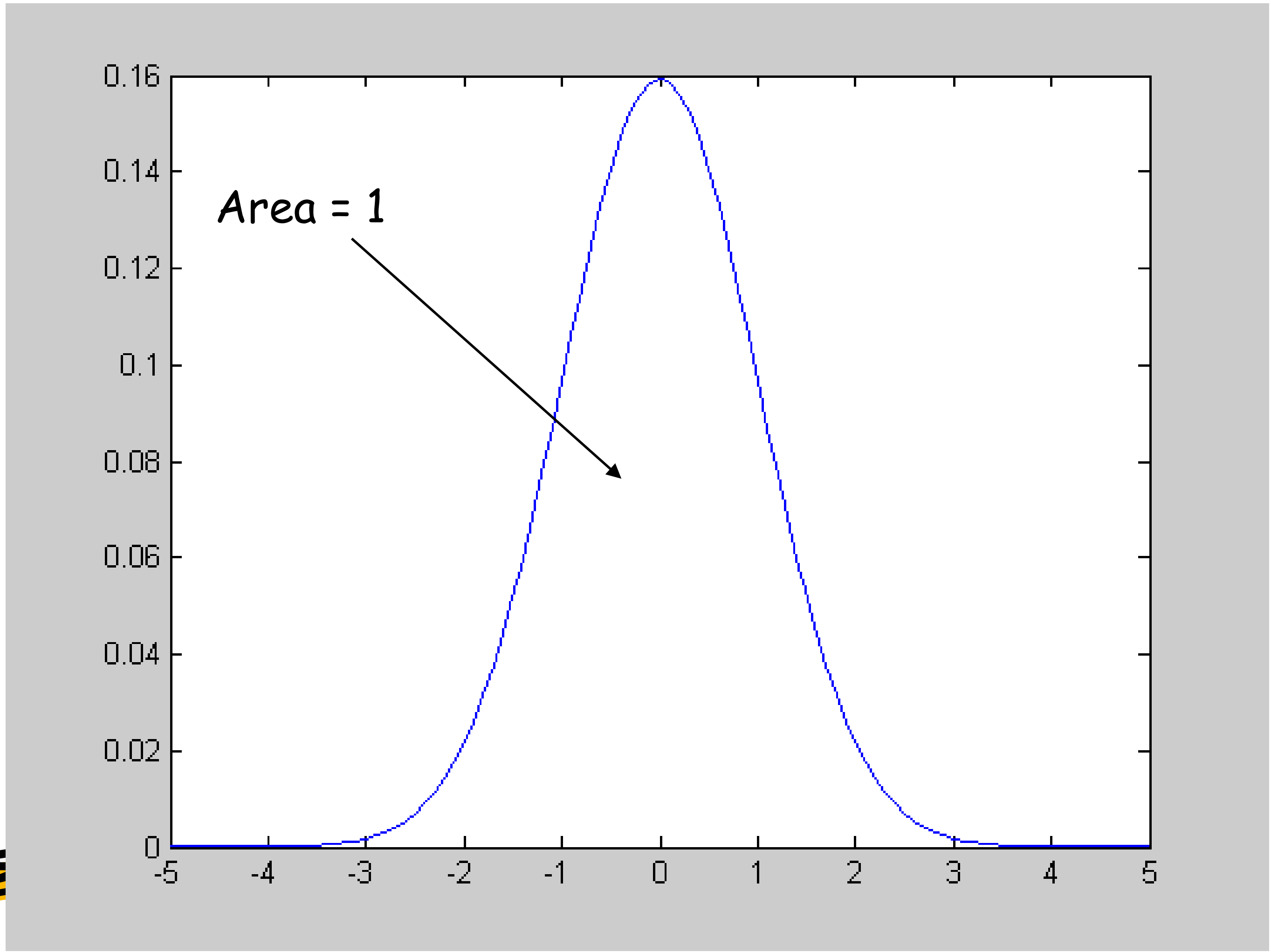
Gaussian Distribution

4.8.5 Normal Distribution(Gaussian Distribution) ด้วย Parameter μ, σ สามารถหาได้จาก

$$N(\mu,\sigma) = f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

สังเกตว่า Function ดังกล่าวไม่สามารถหา Integration ในลักษณะของ Closed Form ได้

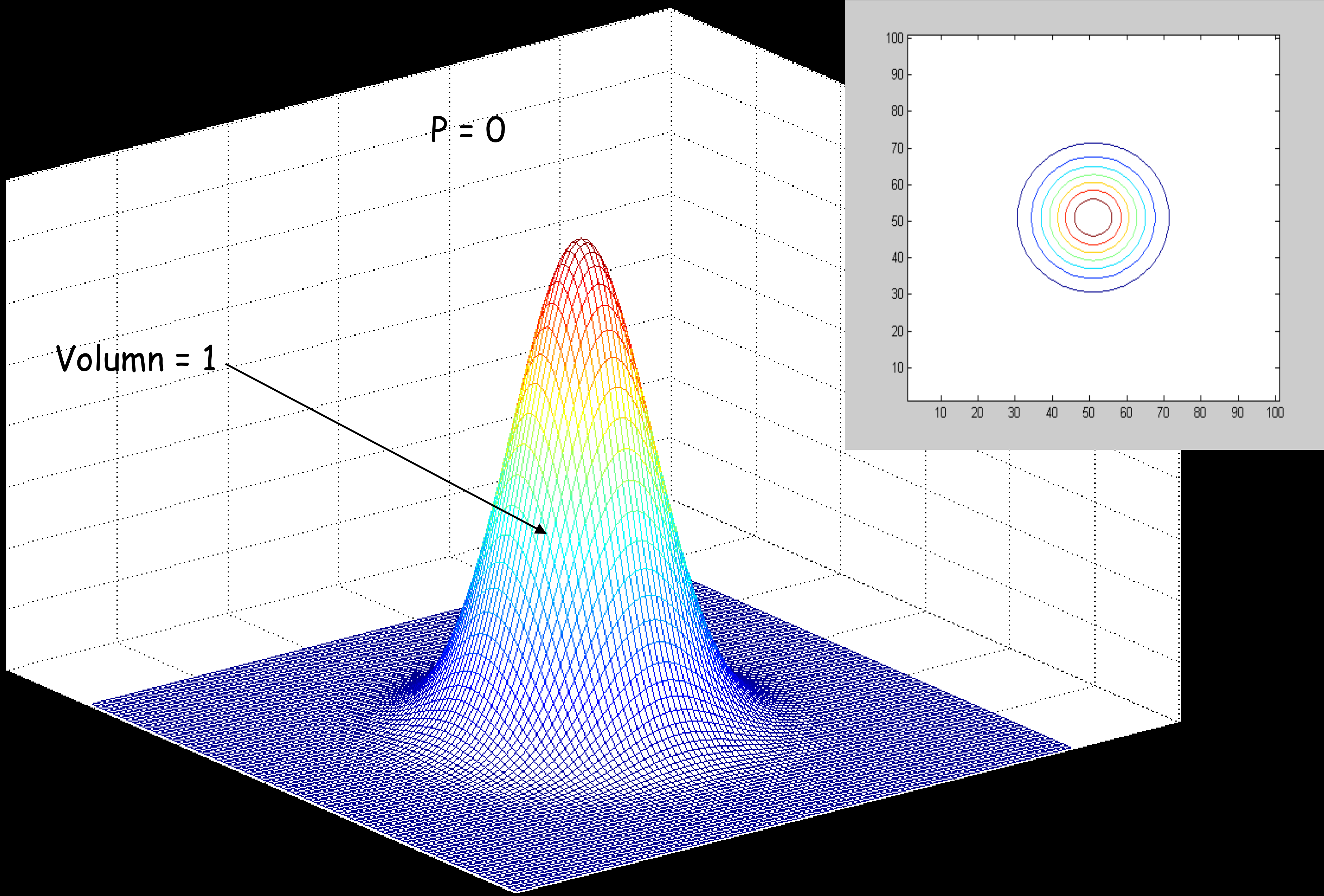
Gaussian

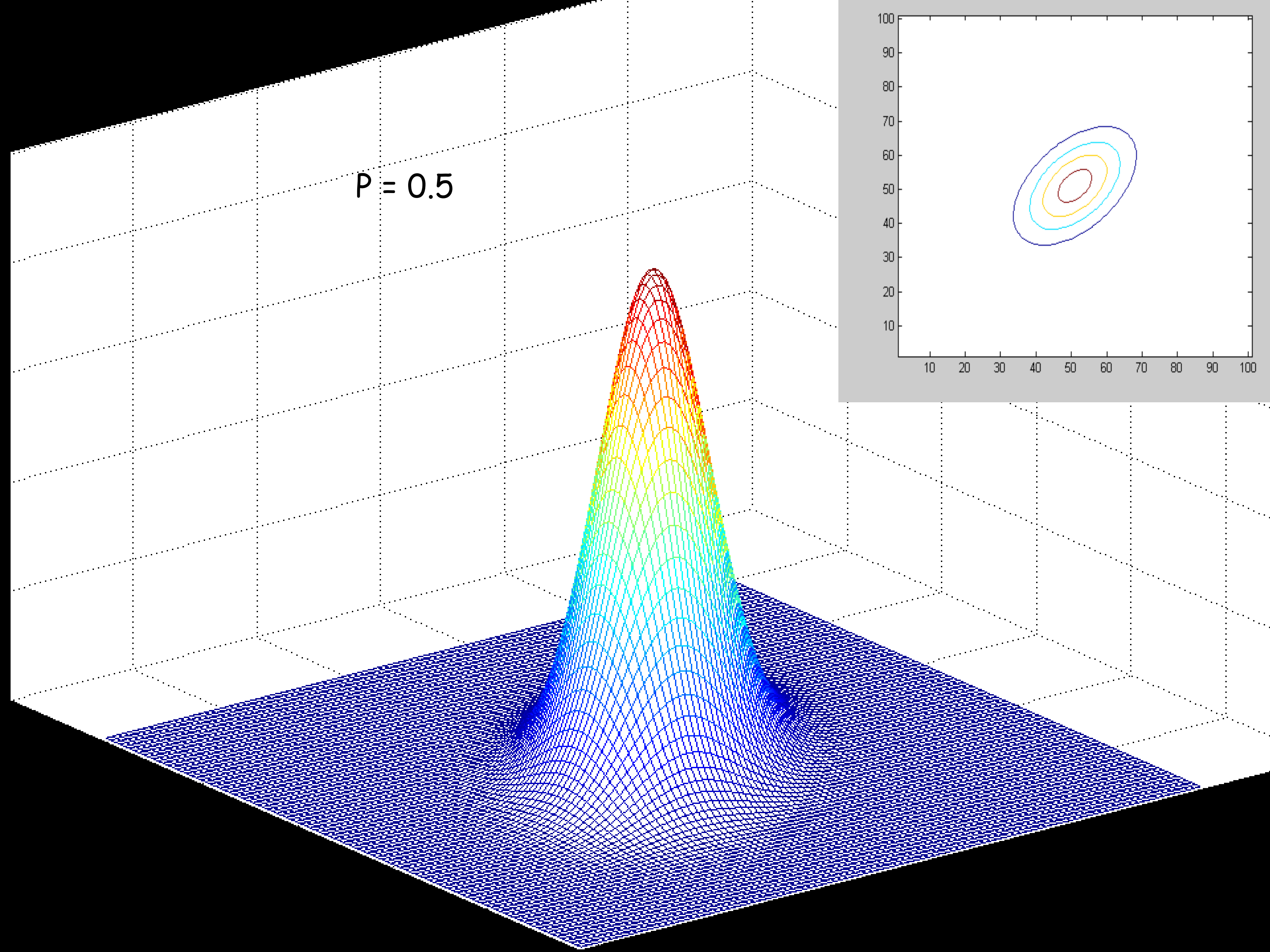


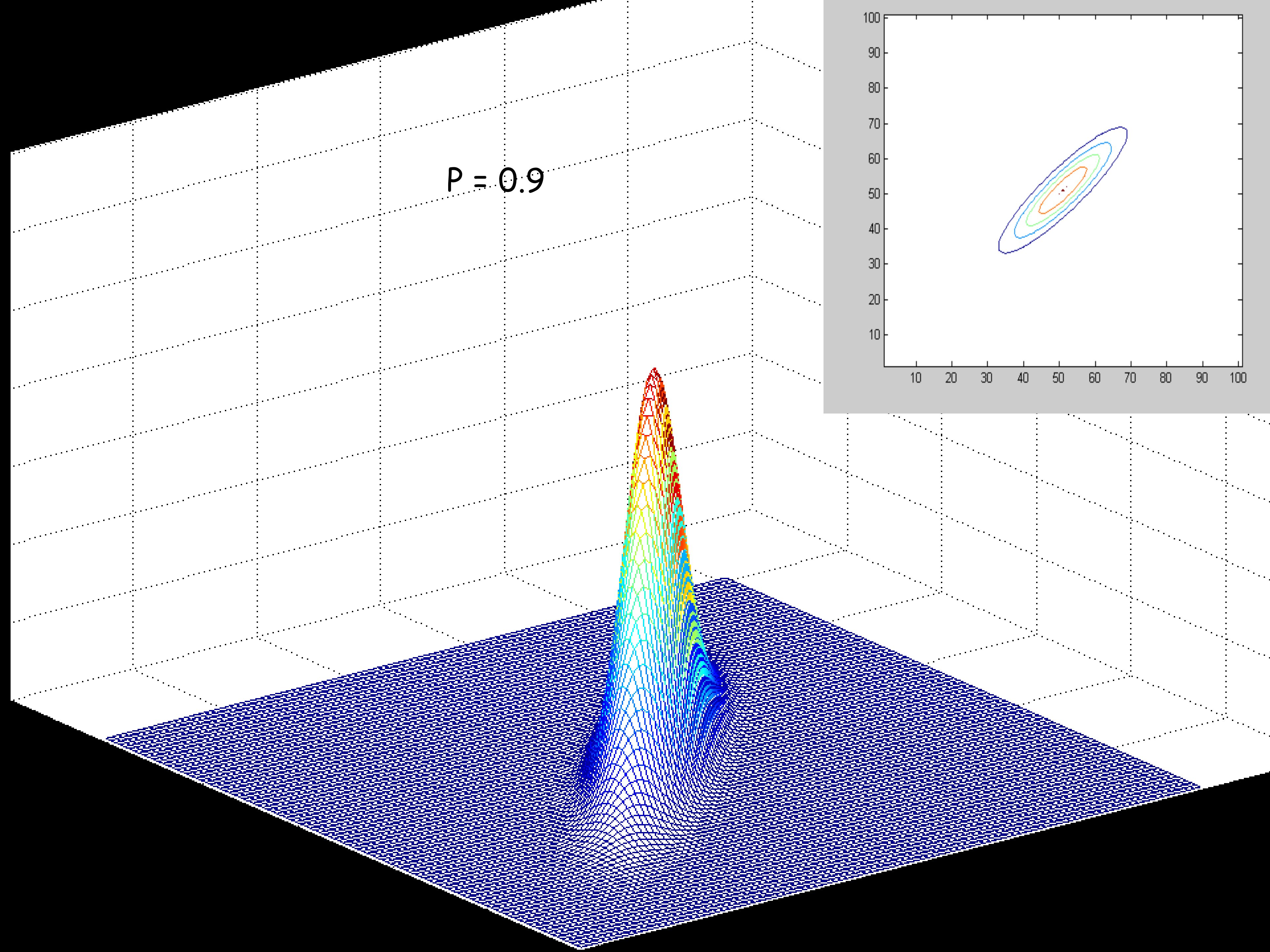
Jointly Gaussian: X, Y

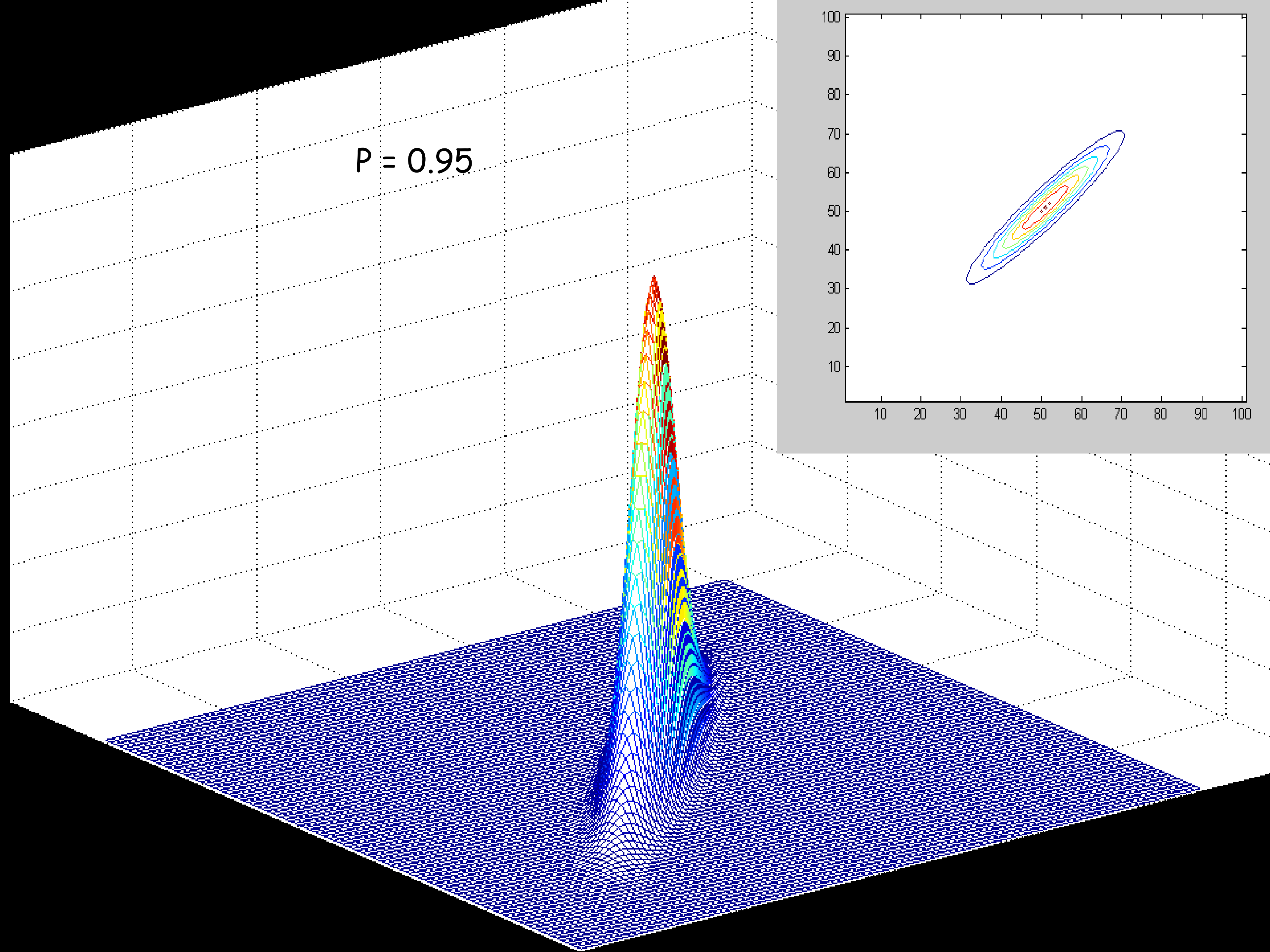
$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sigma_X\cdot\sigma_Y\cdot\sqrt{1-\rho}}\cdot e^{\left[-\frac{1}{2\cdot\left(1-\rho^2\right)}\cdot\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2-\frac{2\cdot\rho\cdot\left(x-\mu_X\right)\cdot\left(y-\mu_Y\right)}{\sigma_X\sigma_Y}+\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right]}$$

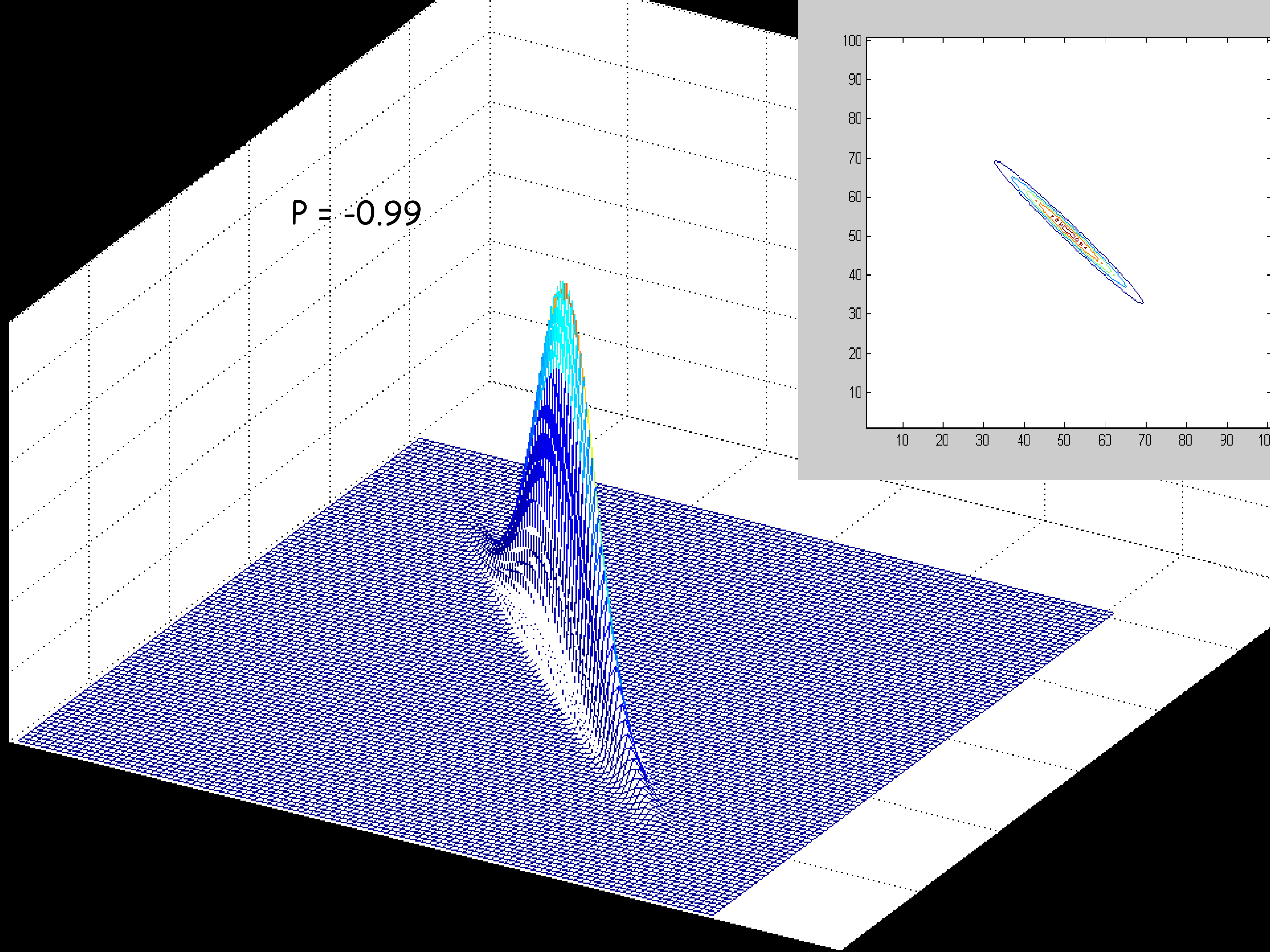
- ค่า ρ คือค่า Correlation Coefficient บ่งบอกถึงความสัมพันธ์ของสอง Variable จะมีค่าระหว่าง [-1,1]
- $\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$
- $f_{XY}(x,y)$ เป็น Joint PDF ที่มี Marginal


P = 0
Volumn = 1
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100


P = 0.5
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100


P = 0.9
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100


P = 0.95
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100


P = -0.99
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
10
20
30
40
50
60
70
80
90

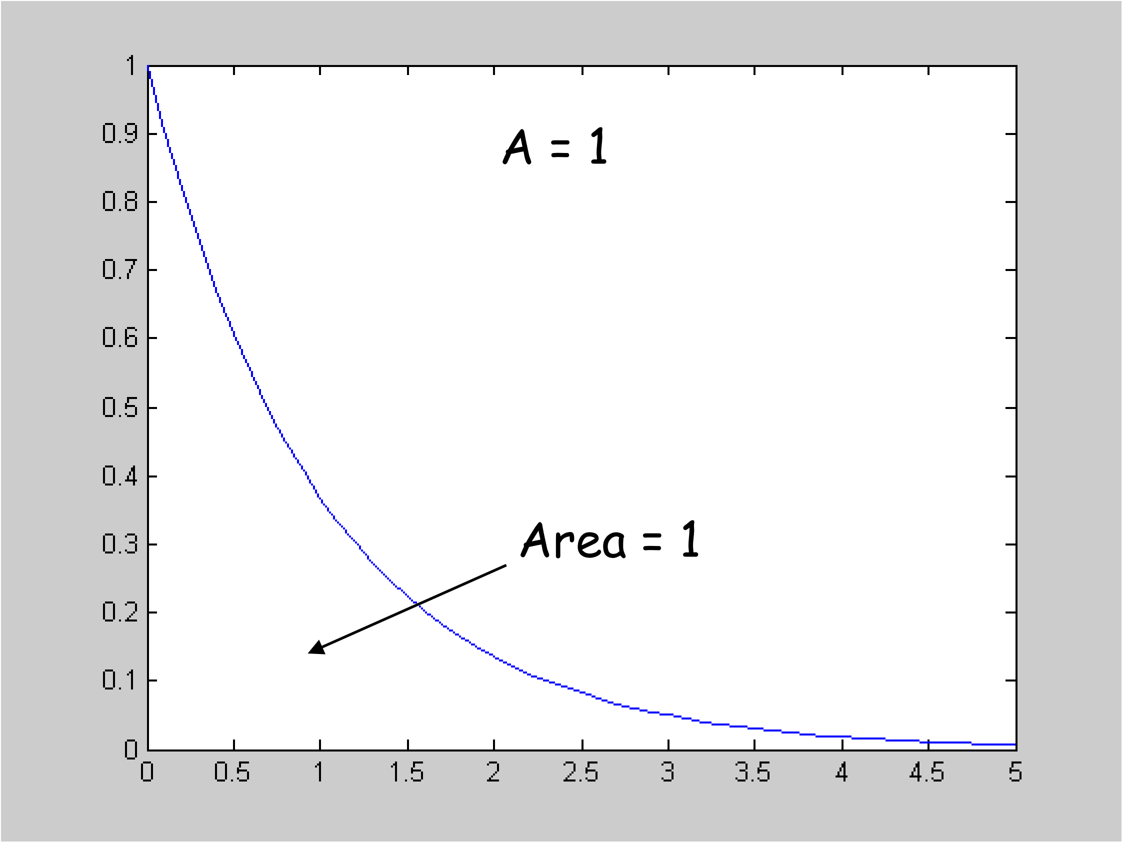
Exponential Distribution

4.8.6 Exponential Distribution Exponential Distribution ที่มี Parameter A สามารถเขียนได้ในรูป

$$f_X(x) = Ae^{-Ax} \text{ และ } F_X(x) = 1 - e^{-Ax}, \ E(X) = \frac{1}{A} \text{ และ } \sigma_X^2 = \frac{1}{A^2}$$

Exponential Distribution เป็น Distribution ที่สำคัญอีกอันหนึ่งใน Queuing Theory ซึ่งค่า Inter-arrival Time ของสอง Random Event ที่อยู่ติดกันจะมีการกระจายแบบนี้ ซึ่งเราสามารถหา Probability ที่ Event ที่สองจะเกิดหลังจาก Event แรกเกิดแล้วภายในเวลา t ได้จาก $p(X \le t) = 1 - e^{-At}$

Exponential Distribution



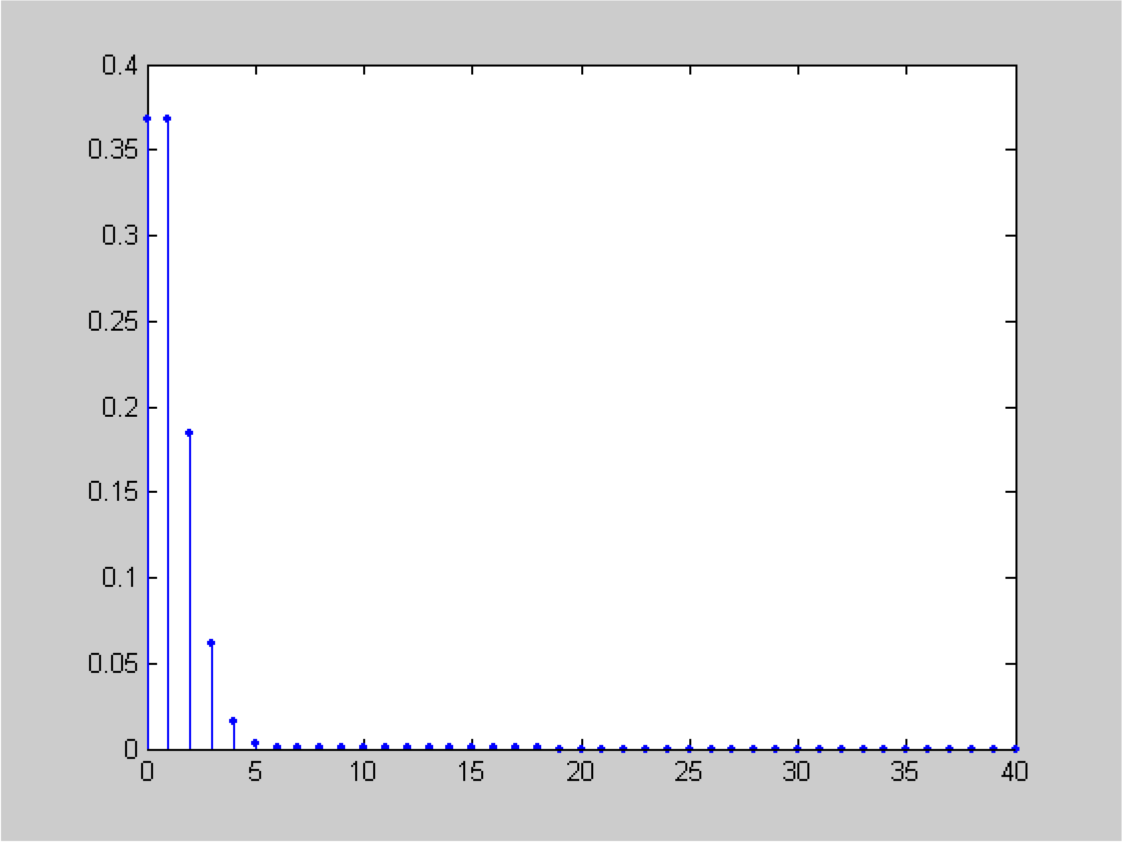
Poisson Distribution

4.8.7 Poisson Distribution เป็น Discrete Random Variable ที่สำคัญสำหรับ Queuing Theory ที่จะศึกษาต่อไป ได้จากการนับของ Independent Random Event ในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่ง ถ้าค่าเฉลี่ยของการนับ Event ในช่วงเวลานั้นเท่ากับ λ ดังนั้น Probability ที่จะมี k Event เข้ามาในช่วงเวลาเดียวกันสามารถหาได้จาก

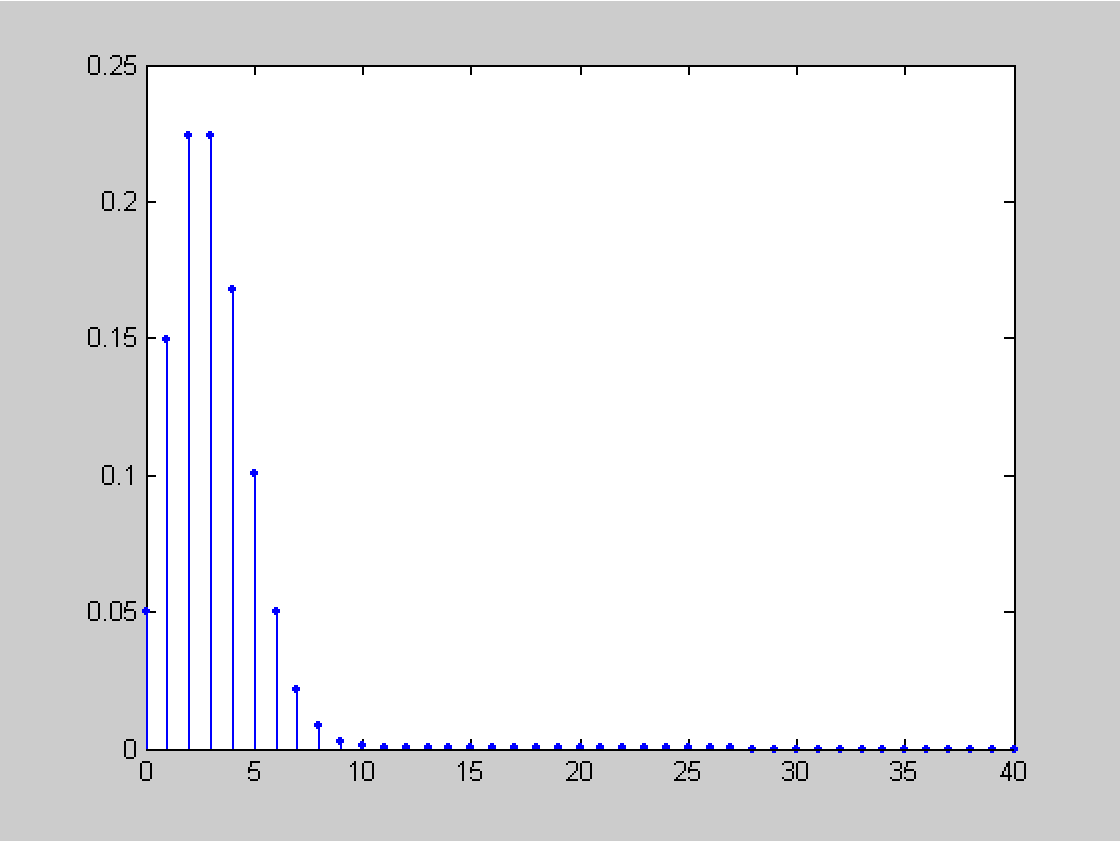
$$p(X=k)=p(k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$ เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $E(X)=\lambda,$ และ $\sigma_X^2=\lambda$

ประโยชน์อีกอย่างของ Poisson คือใช้ในการประมาณค่าของ Binomial Distribution โดยกำหนด $\lambda = np$

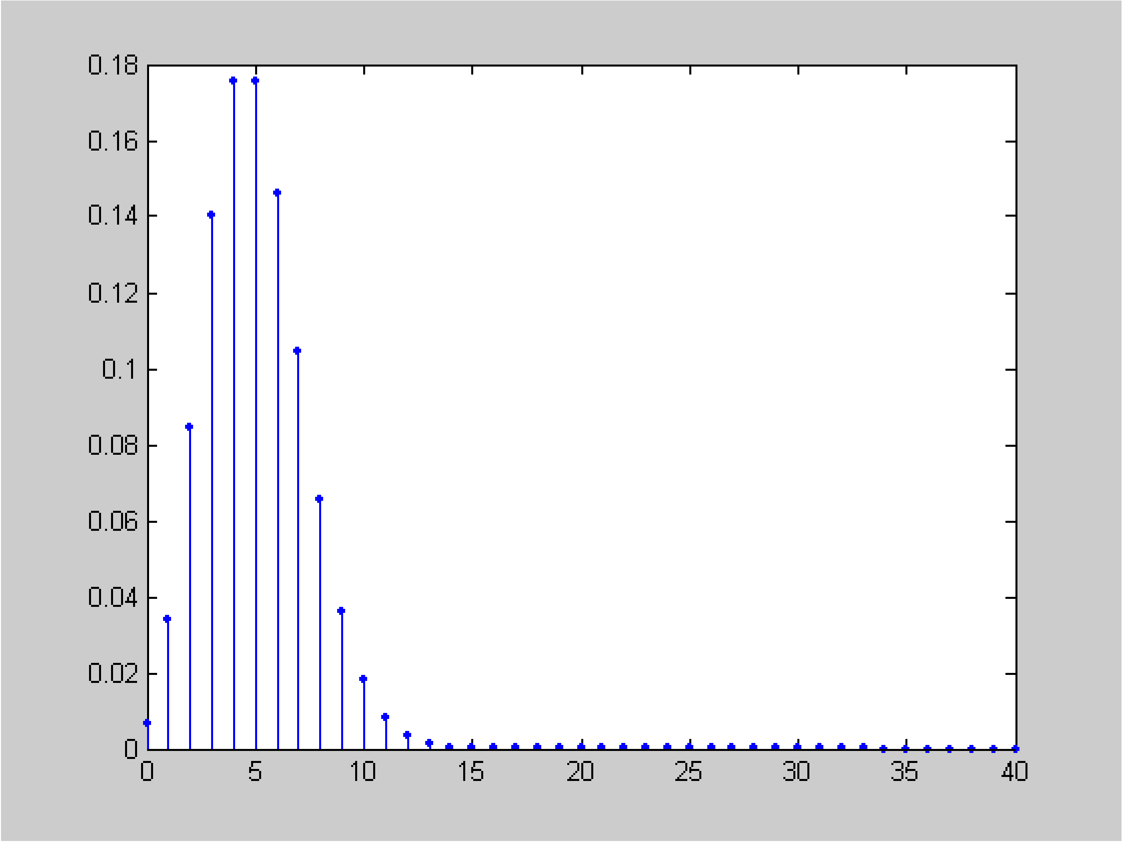
Lambda = 1



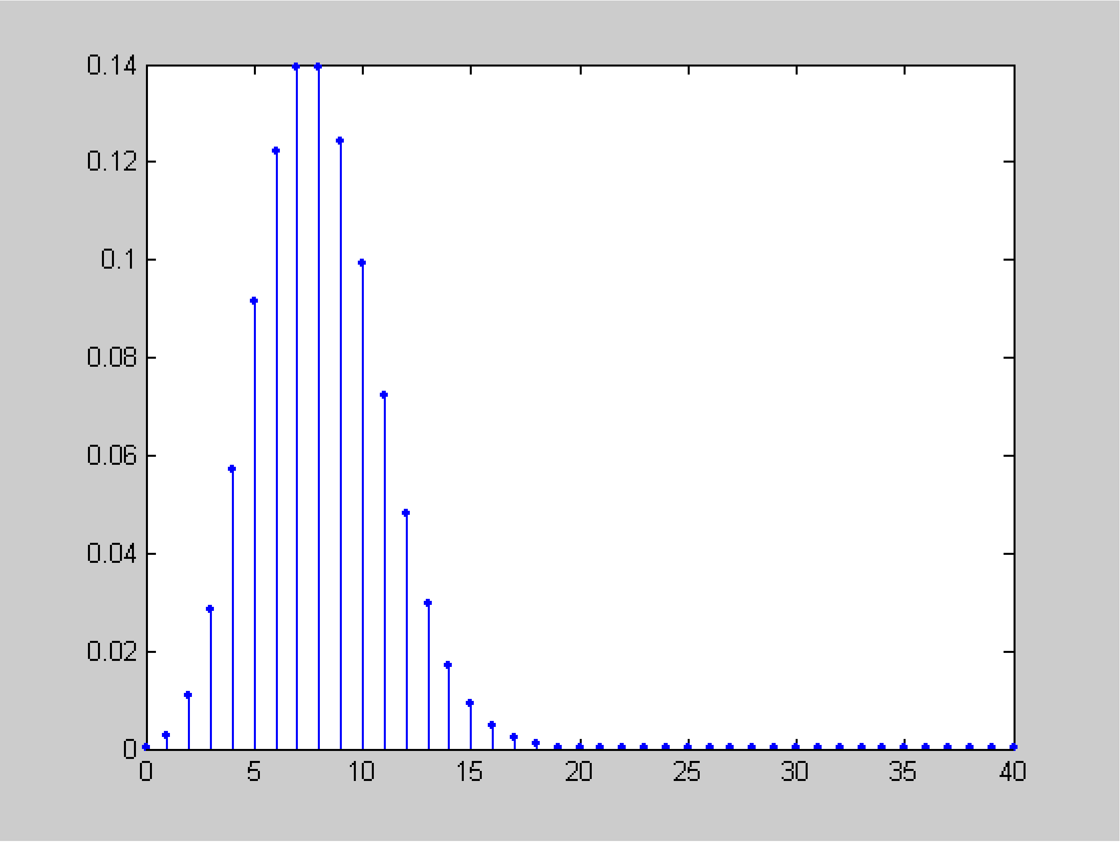
Lambda = 3



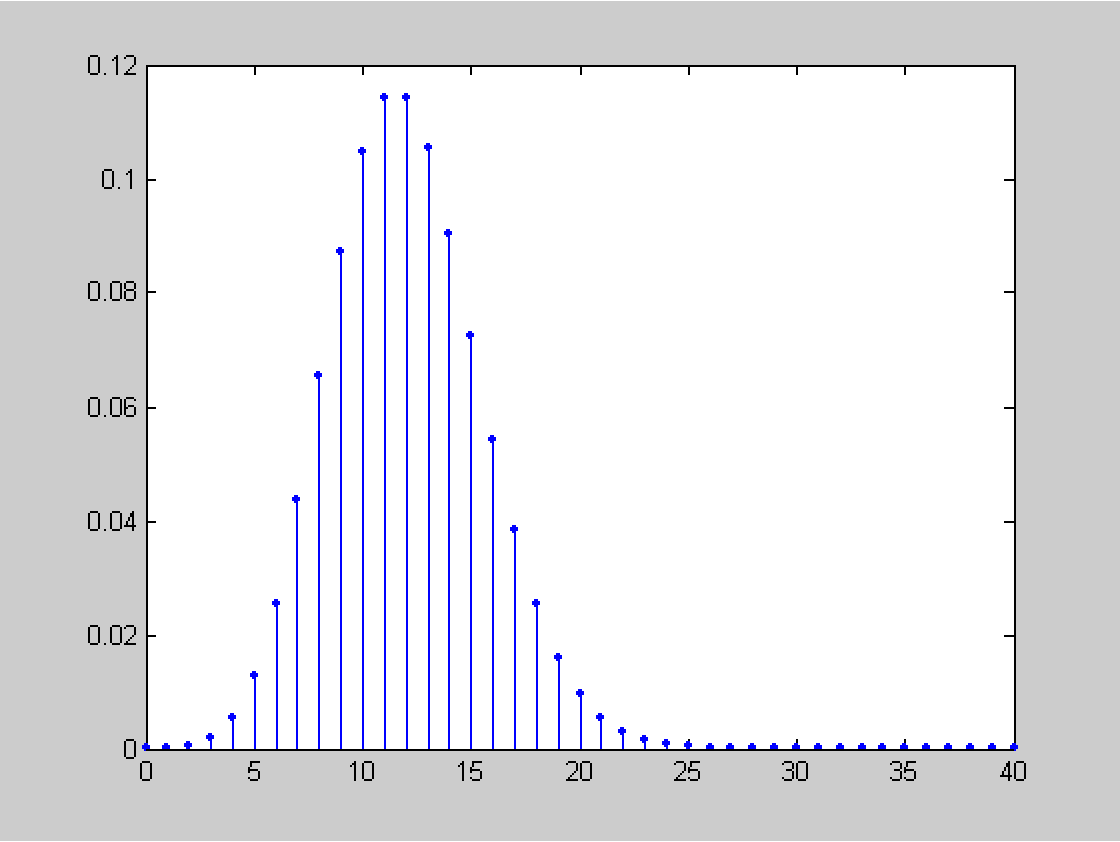
Lambda = 5



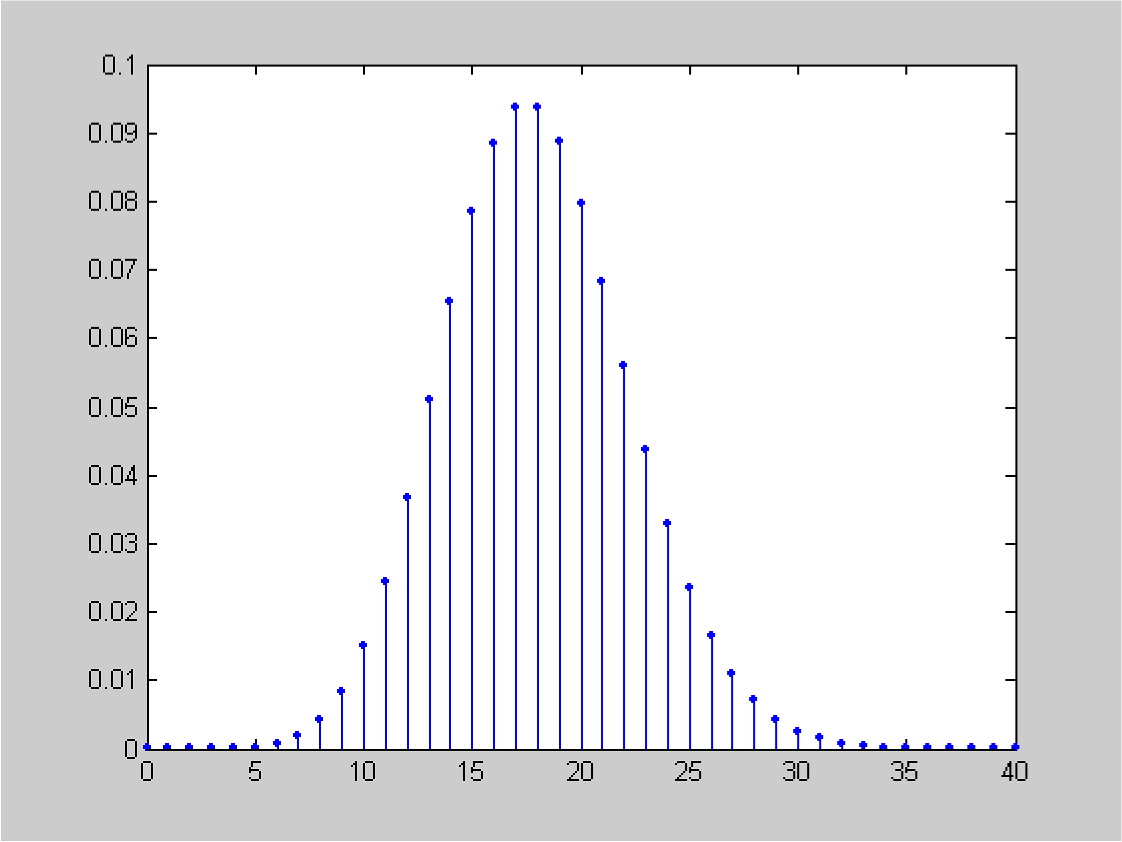
Lambda = 8



Lambda = 12



Lambda = 18



Break

- After Break Chapter 5 Random Process

Random Process

- เมื่อ Random Variable เป็น Function กับเวลา
  - สัญญาณที่มีลักษณะ Random เช่น Noise
  - การส่ง Packet ใน Network
  - จำนวนรถที่วิ่งบนถนน
  - จำนวนลูกค้าที่เข้ามาใช้บริการ
- เหล่านี้ ในแต่ละเวลาหนึ่งๆ ค่าของมันจะมีลักษณะเป็น Random คือมี PDF ตามแต่ชนิดของมัน
  - ที่เวลาต่างกัน PDF อาจจะเปลี่ยน และค่าทางสถิติจะเปลี่ยนตาม
- Random Variable ที่เป็น Function (Random Function หรือ Analytic Function) กับเวลา เราเรียก Random Process หรือ Stochastic Process
  - จาก RV **X** จะเป็น **X**(t)
  - Mean และ Variance จะเป็น Function กับเวลาด้วย
- การวิเคราะห์จะซับซ้อนกว่า RV

Random Process (Stochastic Process)

5.1 นิยามและคำจำกัดความ

Random Process เป็นการขยายคำจำกัดความของ Random Variable, เราสามารถคิดได้อย่างง่ายๆว่า Random Process คือ Random Variable ที่เป็น Function กับเวลา(หรือ Independent Variable ตัวอื่น) ซึ่งบางครั้งเราเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า **Stochastic Process** ดังนั้นถ้าเราให้ $X(t)$ เป็น Random Process เราจะได้ว่าในแต่ละจุดของเวลา $t_1, t_2, \ldots, t_n$ Random Process ที่เวลานั้นๆ $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$ แต่ละตัวจะเป็น Random Variable ซึ่งอาจจะมีหรือไม่มีค่า Probability Density Function ที่เหมือนกันหรือเท่ากันก็ได้

ค่าของ Random Process ที่เวลาหนึ่งๆเราเรียกมันว่าเป็น Random Variable ที่ Ensemble ของเวลานั้น อย่างไรก็ตาม ตามปกติการวัดค่าของสัญญาณนั้นเราจะได้ข้อมูลที่เป็น Sample Point ของ Random Variable ในแต่ละจุดของเวลา ซึ่งถ้าเราวัดติดต่อกันไป เราก็จะได้ Function หนึ่งซึ่งเป็นสัญญาณที่เปลี่ยนไปตามเวลา ซึ่งเราเรียกว่า Sample Function ของ Random Process

Statistical Average

สำหรับในแต่ละเวลา ค่า $X(t_i)$ ก็คือ RV ฉะนั้นค่าทางสถิติจะหาได้จาก Expectation ซึ่งค่าที่ได้จะเป็นค่าทางสถิติที่เป็น Function กับเวลา มีค่าทางสถิติที่เพิ่มมาที่สำคัญก็คือ Autocorrelation และค่า Autocovariance

5.2.1 Mean ค่าของ Mean ในความหมายทางสถิติก็คือค่า $E[X(t)]$ เนื่องจาก $X(t)$ เป็น Function กับเวลา ดังนั้นค่า Mean ที่ได้ก็จะเปลี่ยนไปตามเวลาด้วย นั่นก็คือ $m_X(t) = E[X(t)]$

5.2.2 Variance ที่เวลา t_i เราสามารถหาค่า Variance $\sigma_X(t_i)$ ได้จาก PDF ของ $X(t_i)$ นั่นก็คือ

$$\sigma_X^2(t_i) = E[(X(t_i) - m_X(t_i))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X(t_i) - m_X(t_i))^2 f_{X(t_i)}(x)dx$$

- Notations:
  - Random Variable: X
  - Random Process: $X(t)$
- PDF
  - Random Variable: $f_X(x)$
  - Random Process: $f_{X(t)}(x,t) = f_{X(t)}(x)$ที่เวลา t
- Expectation (Statistical Average)
  - $\mu_X(m_X) \rightarrow \mu_{X(t)}(t)$

    $\sigma_X^2 \rightarrow \sigma_{X(t)}^2(t)$

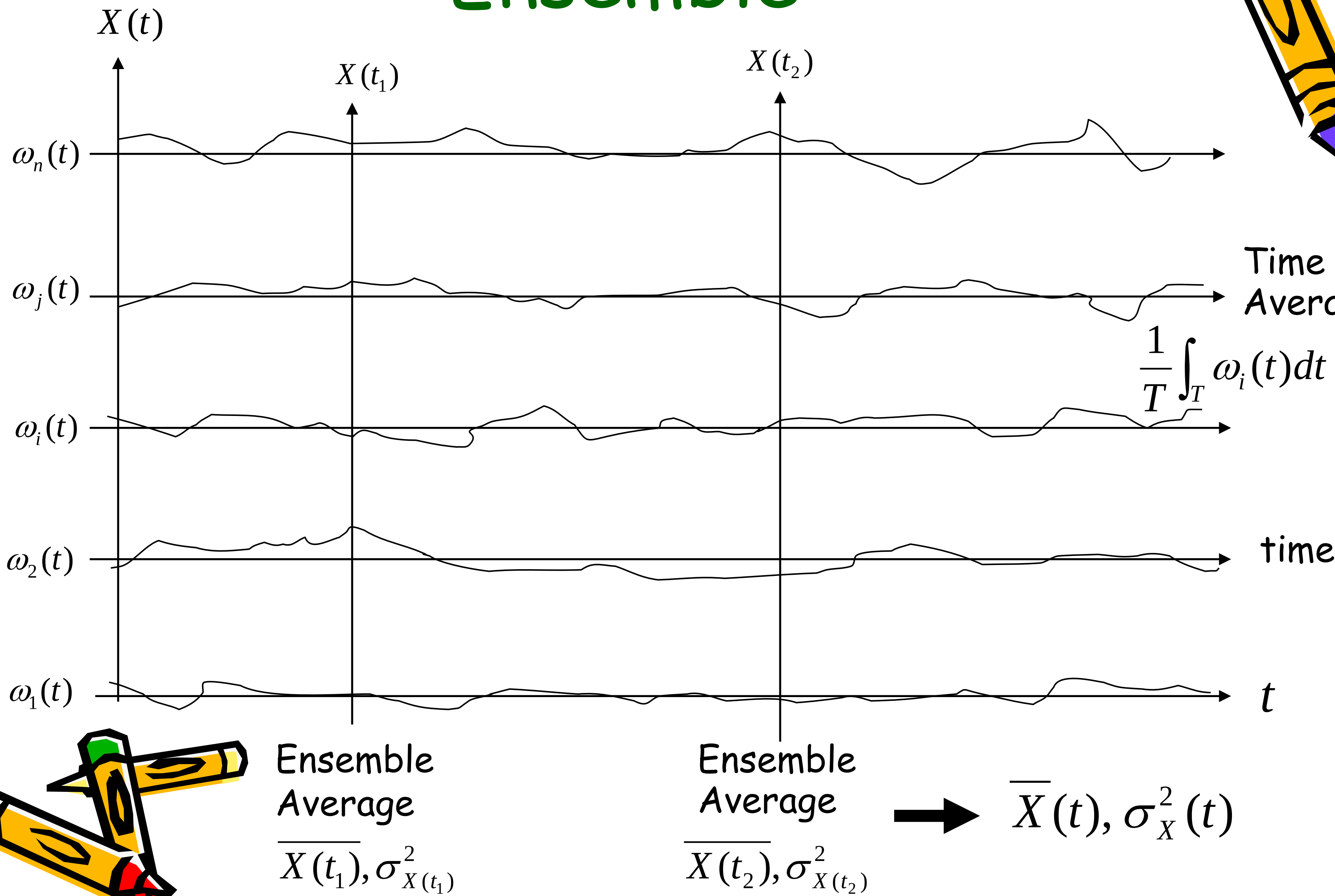
Random Process at t_i

- Random Process ที่เวลาใดเวลาหนึ่ง คือ Random Variable ที่มีค่า PDF, Mean, Variance เฉพาะ
  - เรียกค่าใน Ensemble (Ensemble Average)
- ค่าต่างๆนี้จะแปรผันไปกับเวลาได้
  - $X(t_1)$เป็น Random Variable ได้จาก Random Process ที่ t_1 จะมี PDF, Mean, Variance $f_{X(t_1)}(x),\ \mu_{X(t_1)}, \sigma_{X(t_1)}$

Sample Function: Ensemble Average and Time Average

- ในการศึกษา Random Variable เราสามารถสุ่มตัวอย่างทีละตัวอย่าง เรียก Sample Point, ω_i
- ในกรณีของ Random Process ตัวอย่างที่สุ่มจะเป็นตัวอย่างที่เป็น Function กับเวลา เรียก Sample Function, $\omega_i(t)$
- ค่าเฉลี่ยในแต่ละเวลา เราเรียก Ensemble Average
  - จะเหมือนค่าเฉลี่ยปกติของ Random Variable
- ค่าเฉลี่ยของแต่ละ Sample Function เรียก Time

Sample Function and Ensemble



Statistical Average: Correlation/Covariance

5.2.3 Autocorrelation ค่า Autocorrelation Function ของ Random Process $X(t)$ คือความสัมพันธ์ของตัวมันเองที่เวลาต่างกัน(เปรียบเทียบกับ Autocorrelation ของ Deterministic Signal) นั่นก็คือ

$$R_{XX}(t_1,t_2) \equiv R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1,x_2)dx_1 dx_2$$

5.2.4 Autocovariance Function ในทำนองเดียวกัน เราสามารถหา Autocovariance Function ได้จาก

$$C_{XX}(t_1,t_2) \equiv C_X(t_1,t_2) = E[(X(t_1)-m_X(t_1))(X(t_2)-m_X(t_2))]$$

Stationary RP

- ค่าทางสถิติของ RP Process ปกติเปลี่ยนไปกับเวลา (Ensemble Average ที่เวลาต่างกัน)
  - Mean
  - Variance
  - PDF
- สำหรับกรณีพิเศษที่ค่าทางสถิติของ RP ไม่แปรผันกับเวลา เราเรียกว่ามันเป็น Stationary
  - $f_{X(t)}(x,t) \rightarrow f_{X(t)}(x)$
  - $\mu_{X(t)}(t) \rightarrow \mu_{X(t)}(\mu_X)$

    $\sigma^2_{X(t)}(t) \rightarrow \sigma^2_{X(t)} = \sigma^2_X$

Stationary RP

- Stationary RP
  - Strict Sense Stationary (SSS)
    - PDF ไม่เปลี่ยน ดังนั้นทุกๆ Moment (Expectation) ไม่เปลี่ยน
    - ปกติ SSS จะหาได้ยากในทางปฏิบัติ บ่อยครั้งที่เราสนใจแค่สอง Moment แรก
  - Wide Sense Stationary (WSS)
    - เฉพาะ 2 Moment แรกคงที่ แต่ PDF อาจแปรผัน
      - Mean
      - Variance (Mean Square)

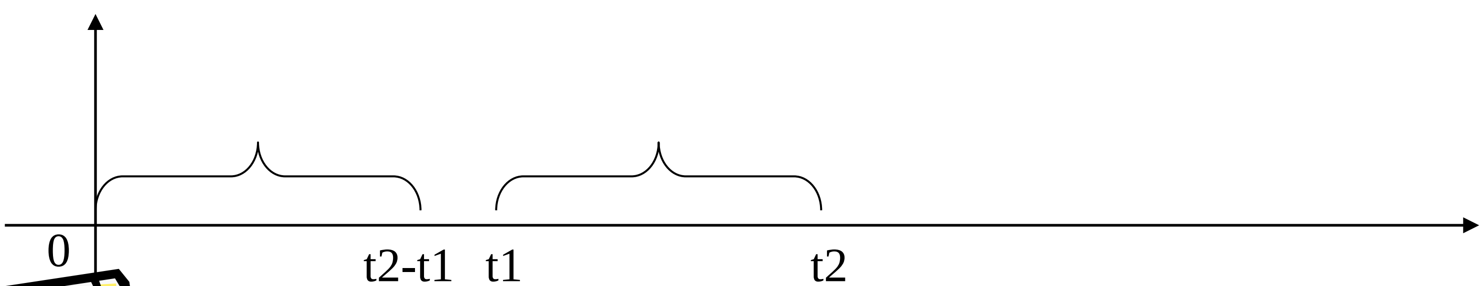
มีข้อที่น่าสังเกตอีกอันหนึ่ง คือถ้า Random Process นั้นเป็น Gaussian Process นั่นก็คือทุกจุดเวลามันจะมีลักษณะ PDF เป็นแบบ Gaussian เนื่องจาก Gaussian PDF สามารถอธิบายได้จากค่าทางสถิติเพียงแค่สองตัวคือค่า Mean และค่า Variance ดังนั้นในกรณีของ Gaussian Process คำว่า Wide-Sense Stationary จะมีความหมายเดียวกันกับ Strict-Sense Stationary

WIDE SENSE STATIONARY

- $m_X(t)$ หรือ $\mu_X(t)$ จะลดรูปลงเหลือ m_X และ $\sigma_X(t)$ จะกลายเป็น σ_X

- $R_X(t_1,t_2)$ จะไม่ขึ้นกับเวลา t_1 และ t_2 อีกต่อไป แต่จะขึ้นกับผลต่างของเวลา $t_2 - t_1 = \tau$ นั่นก็คือเราได้ $R_X(t_1,t_2) = R_X(t_2 - t_1) = R_X(\tau)$

- $C_X(t_1,t_2)$ จะลดรูปลงเหลือ $C_X(t_1,t_2) = R_X(\tau) - m_X^2$

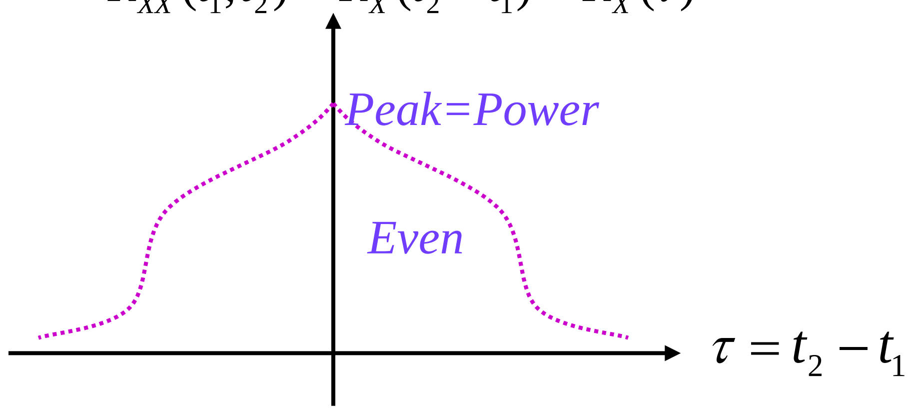


Autocorrelation(WSS)

คุณสมบัติที่สำคัญก็คือการลดรูปของค่า Autocorrelation ซึ่งจะอยู่ในรูปที่เหมือนกับในกรณีของ Deterministic Signal ต่อไปนี้เป็นคุณสมบัติของ Autocorrelation

- $R_X(0) = E[X^2(t)]$ ซึ่งเกี่ยวพันกับ Power และ Energy ของสัญญาณ Random ซึ่งก็คือสัญญาณที่เป็น Random Process
- $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$ นั่นก็คือ $R_X(\tau)$ เป็น Even Function ดังนั้นเราสามารถเขียน $R_X(\tau) = E[X(t)X(t-\tau)]$
- $|R_X(\tau)| \le R_X(0)$

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) = R_X(\tau)$$

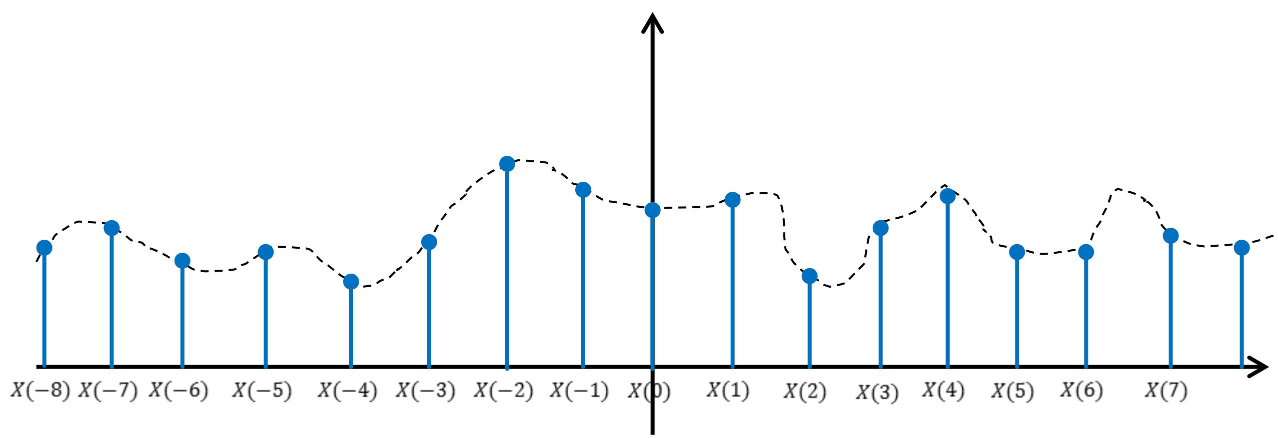


Ergodic Random Process

- ถ้า RP เป็น Ergodic
  - Time Average = Ensemble Average
  - Mean Ergodic
    - หมายถึงค่าเฉลี่ยในทางเวลา $\frac{1}{T}\int_T \omega_i(t)dt$ เท่ากับค่าเฉลี่ย(mean = E(X(t$_i$))) ของ Ensemble
  - Correlation Ergodic
    - หมายถึงค่า Variance ในทางเวลา $\frac{1}{T}\int_T (\omega_i(t) - \overline{\omega_i(t)})^2 dt$ เท่ากับค่า Variance ที่ได้จาก Ensemble $\sigma^2_{X(t_i)}$
  - เราใช้ควบคู่กับ Concept ของ Stationary Random Process

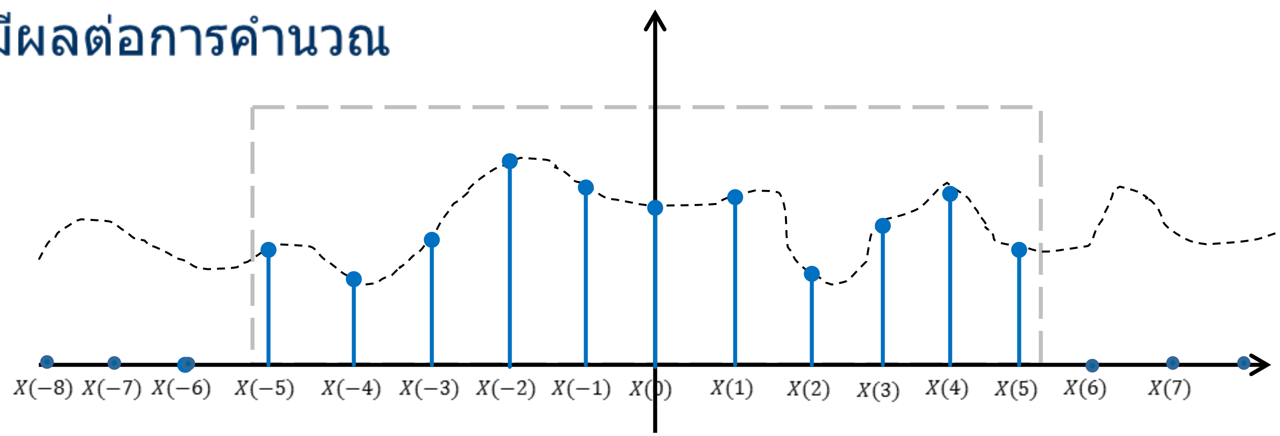
Discrete-Time Random Process

- อาจจะได้จากการสุ่มตัวอย่าง (Sampling) ของ Continuous RP
  - Uniform Sampling ด้วย Sampling Period $T = \frac{1}{fs}$
- เราได้ $\ldots, X(-\mathrm{T}), X(0), X(T), X(2T), X(3T), \ldots$
- ปกติจะละ Sampling Period ไว้ฐานที่เข้าใจ เราได้ $\ldots, X(-1), X(0), X(1), X(2), X(3), \ldots$
- มักจะเขียนในลักษณะ $X(n); n = integer$



Discrete-Time Random Process (Limited Samples)

- จริงแล้ว $n = (-\infty, +\infty)$ แต่ในทางปฏิบัติ เราสามารถสุ่มตัวอย่างได้ในช่วงเวลาที่จำกัด
  - $n = 0,1,2,\ldots,N-1$ หรือ $n = -N, -N+1, \ldots, -1,0,1,\ldots,N$
  - ขึ้นอยู่กับว่าเราจะใช้ Index เรียกตัวอย่างที่ได้อย่างไร
  - เสมือนเราคูณ $X(n)$ด้วย $Box\ Function$ โดยถือว่าตัวอย่างที่อยู่นอกขอบเขตของการสุ่มมีค่าเป็นศูนย์ เช่นในกรณีของ $X(n); n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 5$
  - จะมีผลต่อการคำนวณ



Ergodic Discrete RP

- ถ้า RP เป็น Ergodic ด้วยค่า Mean (Average จาก Ensemble = Average จาก Time)

Mean Ergodic Process

ในกรณีของ Stationary Random Process มีค่า Mean

$$m_x = E[X(n)]$$

คราวนี้ถ้าเราสมมุติค่า Time Average

$$\hat{m}_x = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x(n)$$

และถ้า Process เป็น Ergodic, ดังนั้น

$$m_x = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x(n)$$

Ergodic Discrete RP

- ถ้า RP เป็น Ergodic สำหรับ Coorelation

5.4.2 Correlation Ergodic Process

เมื่อ Stationary Random Process เป็น Correlation Ergodic เราสามารถคำนวณค่า Autocorrelation และ Cross Correlation จากเพียงหนึ่ง Sample Function โดยใช้การเฉลี่ยในทางเวลาแทน ดังนั้น

$$R_{XX}(m) = R_X(m) = E[X^*(n)X(n+m)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^*(n)x(n+m)$$

และ

$$R_{XY}(m) = E[X^*(n)Y(n+m)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^*(n)y(n+m)$$

ค่า Estimation ของ Autocorrelation จากหนึ่ง Sample Function สามารถหาได้จาก

$$\hat{R}_x(m) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^*(n)x(n+m)$$

กรณีที่จำกัด Sequence ความยาว N

ถ้าสมมุติว่าเราได้ Sample Function ของ Discrete Random Process $X(n)$ มาหนึ่งตัว คือ $\omega_i(n) = x(n)$ ดังนั้นเราจะได้

$$E[X(n)] = E(X) = m_X = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^{N} x(n)$$

ในทางปฏิบัติเราไม่สามารถเก็บ Sample Function ได้ตลอดทุกเวลา เราจำเป็นต้องตัดมาเพียงบางส่วน สมมุติว่าเราได้ตัวอย่างความยาว N และให้ $x(n), n = 0,\ldots,N-1$ คือจำนวนเพียง N Sample ดังนั้นค่าที่คำนวณได้จะเป็นเพียงค่า Estimation ของค่า m_X หรือ $\hat{m}_X$ ซึ่งจะถูกต้องขึ้นถ้าเพิ่มจำนวน Sample มากขึ้น และสมการจะลดรูปเป็น

$$\hat{m}_X = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(n)$$

ถ้า $x(n)$ ที่เราสนใจมีค่าอยู่ระหว่าง $n = M$ ถึง $n = N$ สมการจะลดรูปเป็น

$$\hat{m}_X = \frac{1}{N-M+1} \sum_{i=M}^{N} x(n)$$

จำกัด Sequence ความยาว N

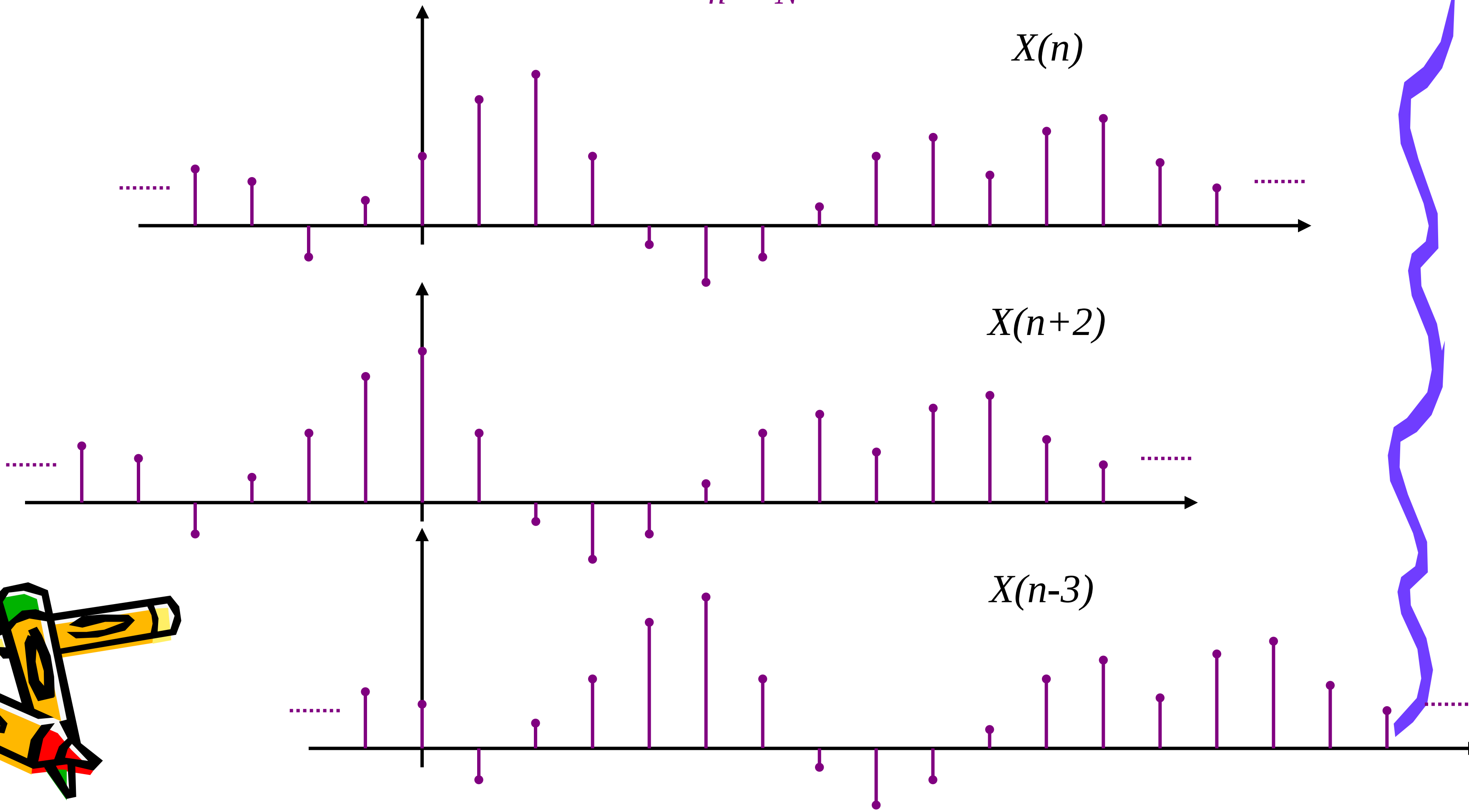
- ค่า Autocorrelation สำหรับ N Samples
  - สมการจะลดรูป เหลือแค่ Sum และเฉลี่ย N Point แต่จะเกิดการ Biased

$$R_{XX}(m) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)x(n+m)$$

$$R_{XX}(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-m-1} x(n)x(n+m); & 0 \le m \le N-1 \\ R_{XX}(-m)\,; & -N+1 \le m < 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{Biased}$$

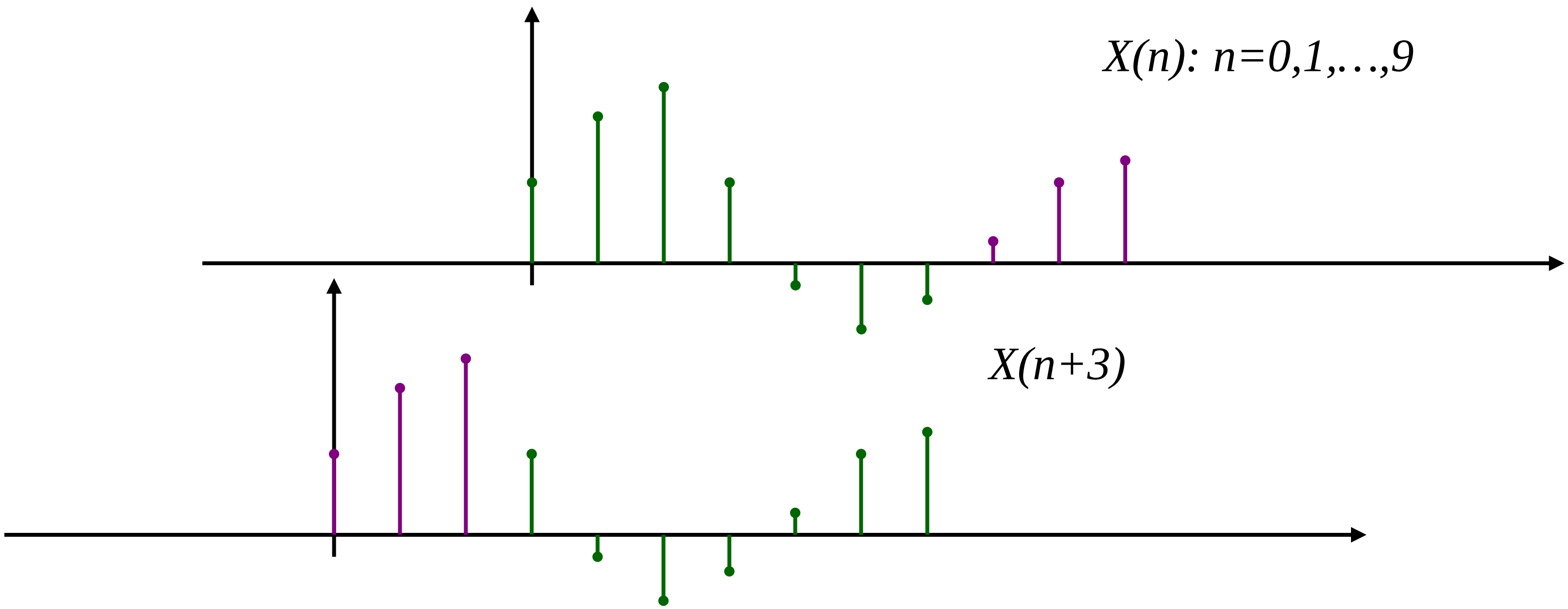
ความหมายของ x(n)x(n+m)

$$R_{XX}(m) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)x(n+m)$$



ความหมายของ x(n)x(n+m), N Points

$$R_{XX}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} x(n)x(n+m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m+1} x(n)x(n+m)$$



เราไม่ควรเฉลี่ยทั้ง N ตัว (Biased) แต่ควรเฉลี่ย N-m ตัว (non-Biased)

จำกัด Sequence ความยาว N

- ค่า Autocorrelation สำหรับ N Samples
  - สมการจะลดรูป เหลือแค่ Sum และเฉลี่ย N Point แต่จะเกิดการ Biased เพราะเราเฉลี่ยน้อยกว่านั้น

$$R_{XX}(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} x(n)x(n+m); & 0 \le m \le N-1 \\ R_{XX}(-m)\,; & -N+1 \le m < 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{Biased}$$

ดังนั้นการคำนวณที่ไม่ Biased จะเป็นค่าที่ Normalized จากจำนวนจุดของการคำนวณจริงๆ และเราได้

$$R_{XX}(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{N-|m|}\sum_{n=0}^{N-m-1} x(n)x(n+m); & 0 \le m \le N-1 \\ R_{XX}(-m)\,; & -N+1 \le m < 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{Non - biased}$$

Sequence ความยาว N / RAW

ในการคำนวณปกติมักจะคำนวนค่าในลักษณะ “Raw Autocorrelation” และละส่วนของการ Normalization หรือส่วนของการหารไว้ สำหรับผู้ใช้จะพิจารณาเองว่าจะใช้แบบ Bised หรือ Non-Biased และเราได้

$$R_{XX}(m)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n+m)x(n)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-m-1}x(n)x(n+m);\ m\geq 0\\ R_{XX}(-m);\ m<0\end{cases}\ ;\quad \text{Raw Data}$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ Cross Correlation เมื่อ $X(n)$ และ $Y(n)$ มีความยาว N เท่ากันโดยการเติมศูนย์ เราได้

$$R_{XY}(m)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y(n+m)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-m-1}x(n)y(n+m)\ ;\ m\geq 0\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{N-m-1}x(n-m)y(n)\ ;\ m<0\end{cases}\ ;\quad \text{Raw Data}$$

Sequence ทั่วไป

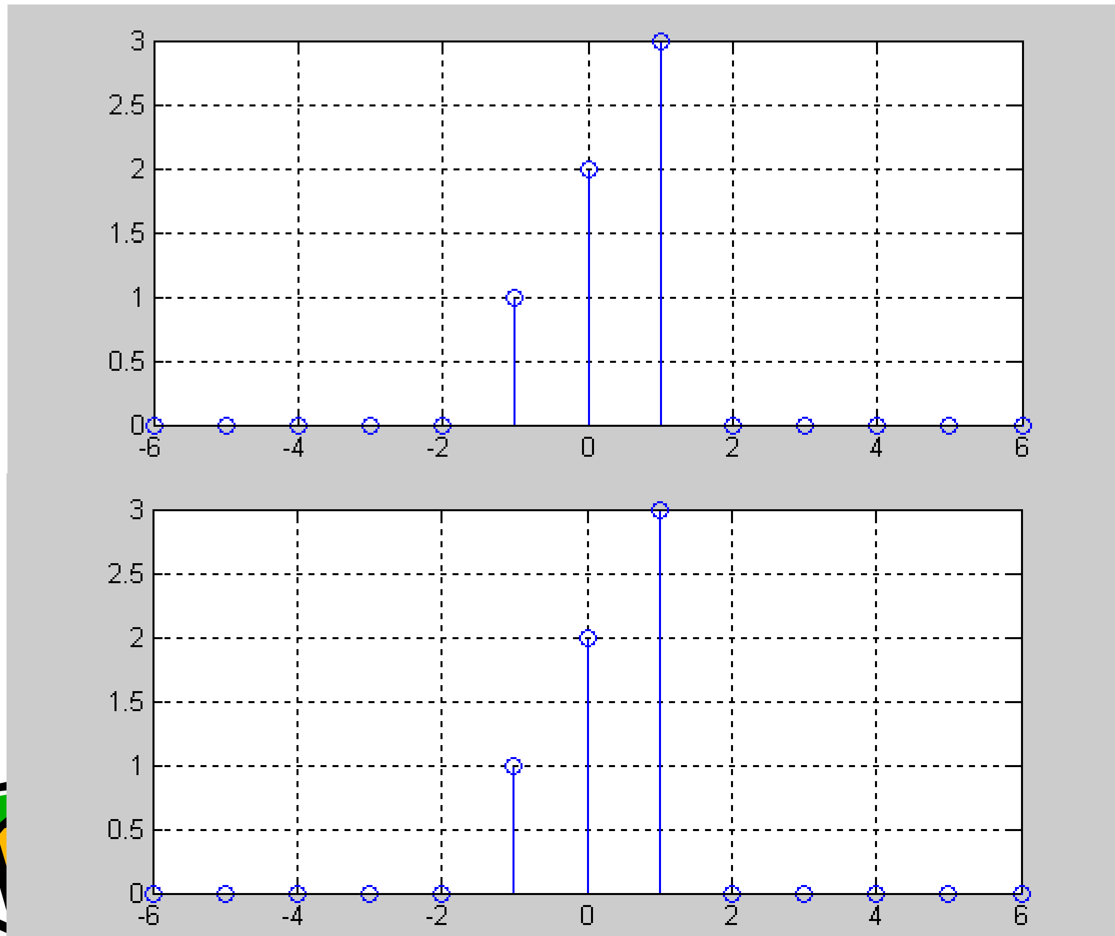
ในกรณีที่สัญญาณไม่ได้เริ่มจาก $n = 0$ และ/หรือทั้งสอง Random Variable มีความยาวไม่เท่ากัน ผลลัพธ์ที่ได้จะมีความยาวของ Sequence $N + M - 1$ โดยที่ N และ M เป็นความยาวของทั้งสอง Variable และในกรณีนี้ค่า Index ของ Summation จะเปลี่ยนไป อย่างไรก็ตาม สมการข้างล่างยังใช้ได้อยู่สำหรับ Raw Data ที่ไม่ได้ทำการ Normalized

$$R_{XX}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+m)\,;\ -\infty < m < \infty \quad \text{Raw Data}$$

$$R_{XY}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n+m)\,;\ -\infty < m < \infty \quad \text{Raw Data}$$

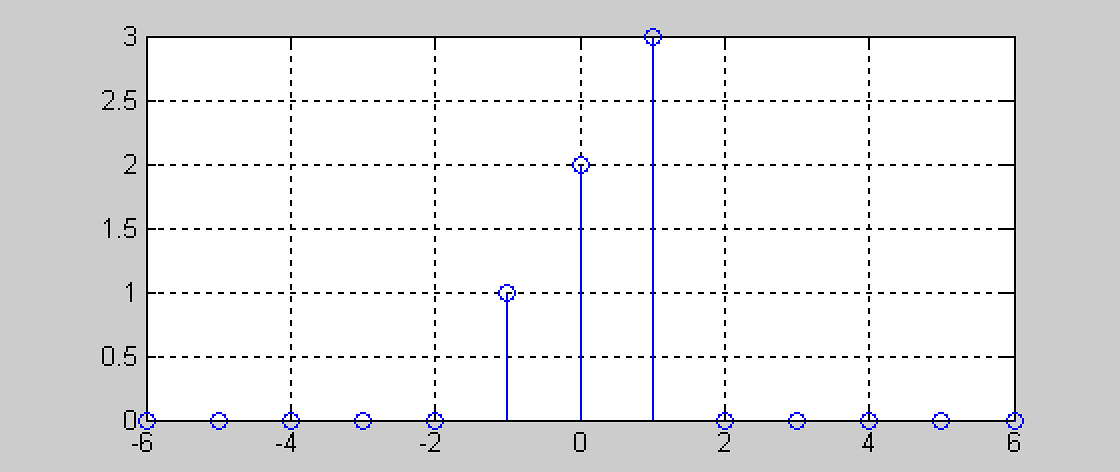
Example: Rxx

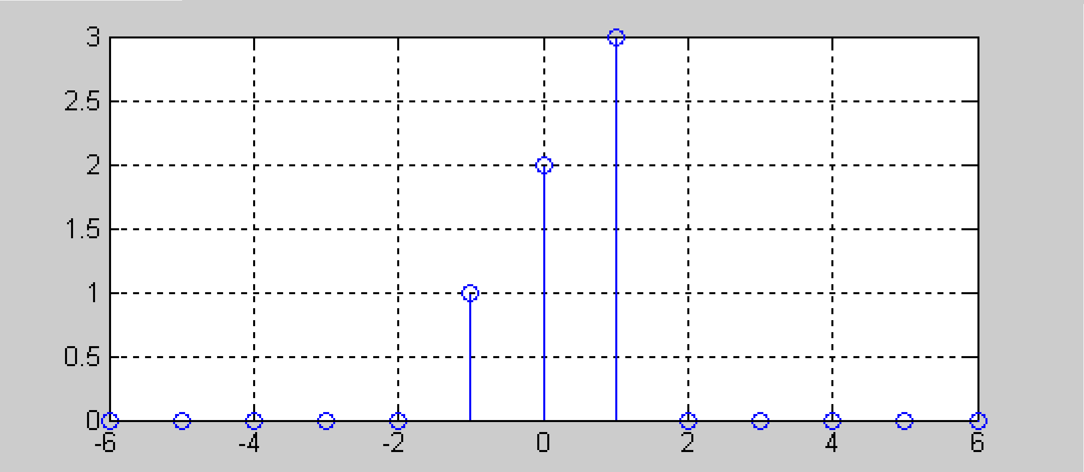
- $x=[1\ \underline{2}\ 3]$



Example: Rxx

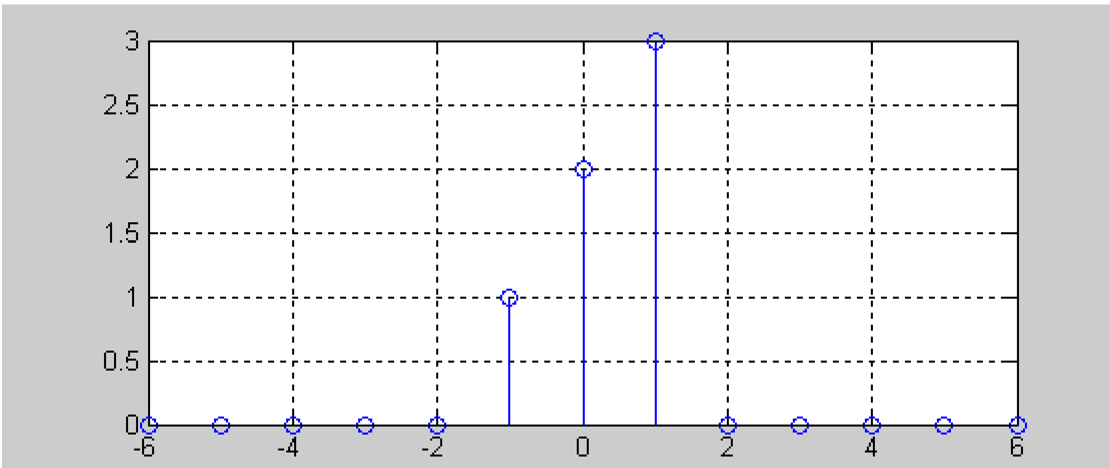
- x=[1 $\underline{2}$ 3]

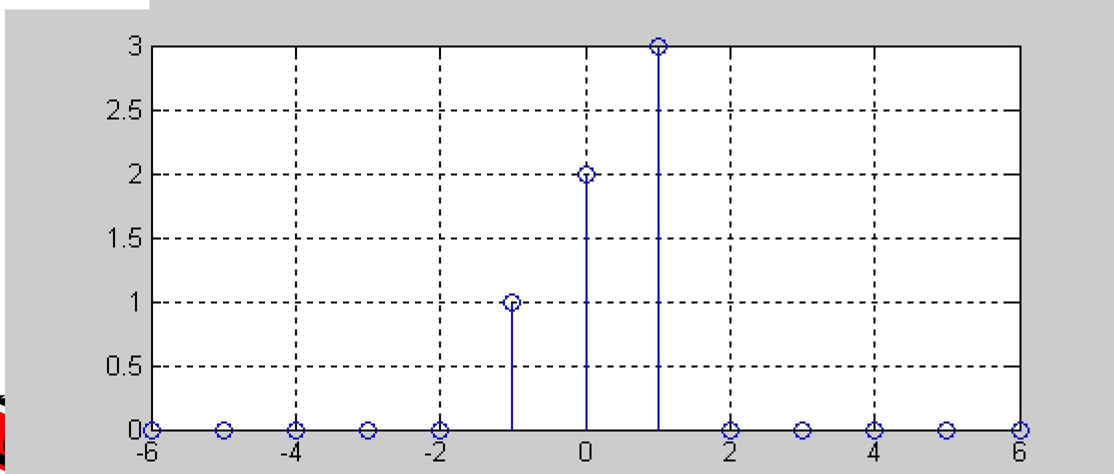




Example: Rxx

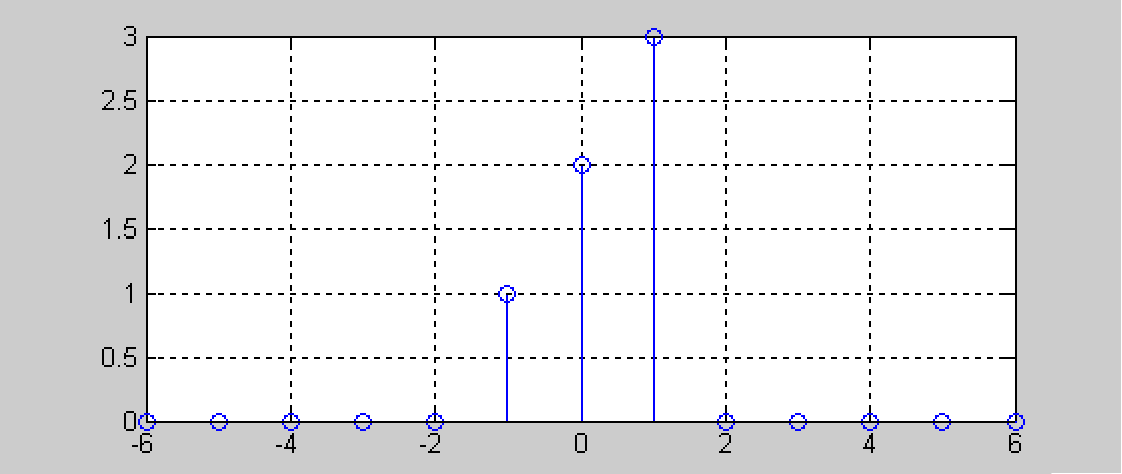
- $x=[1\ \underline{2}\ 3]$

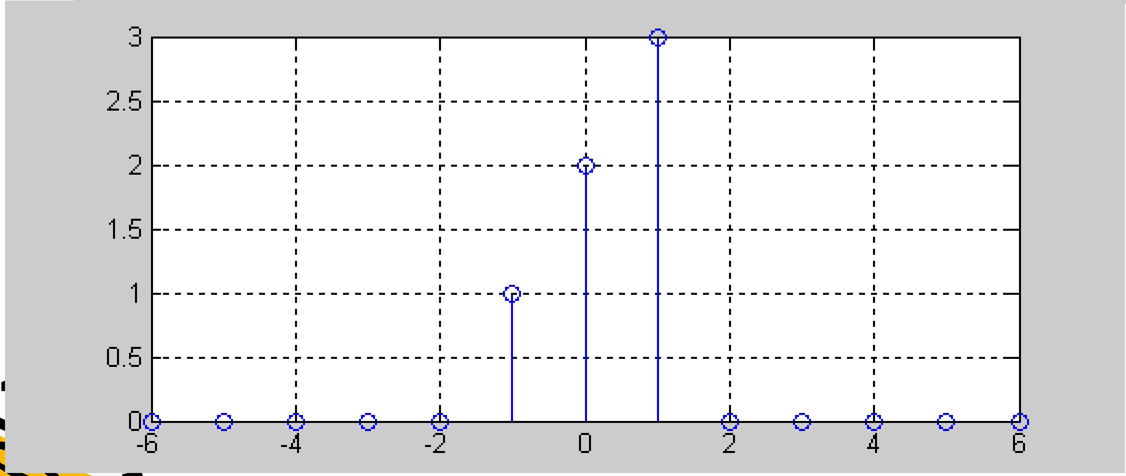




Example: Rxx

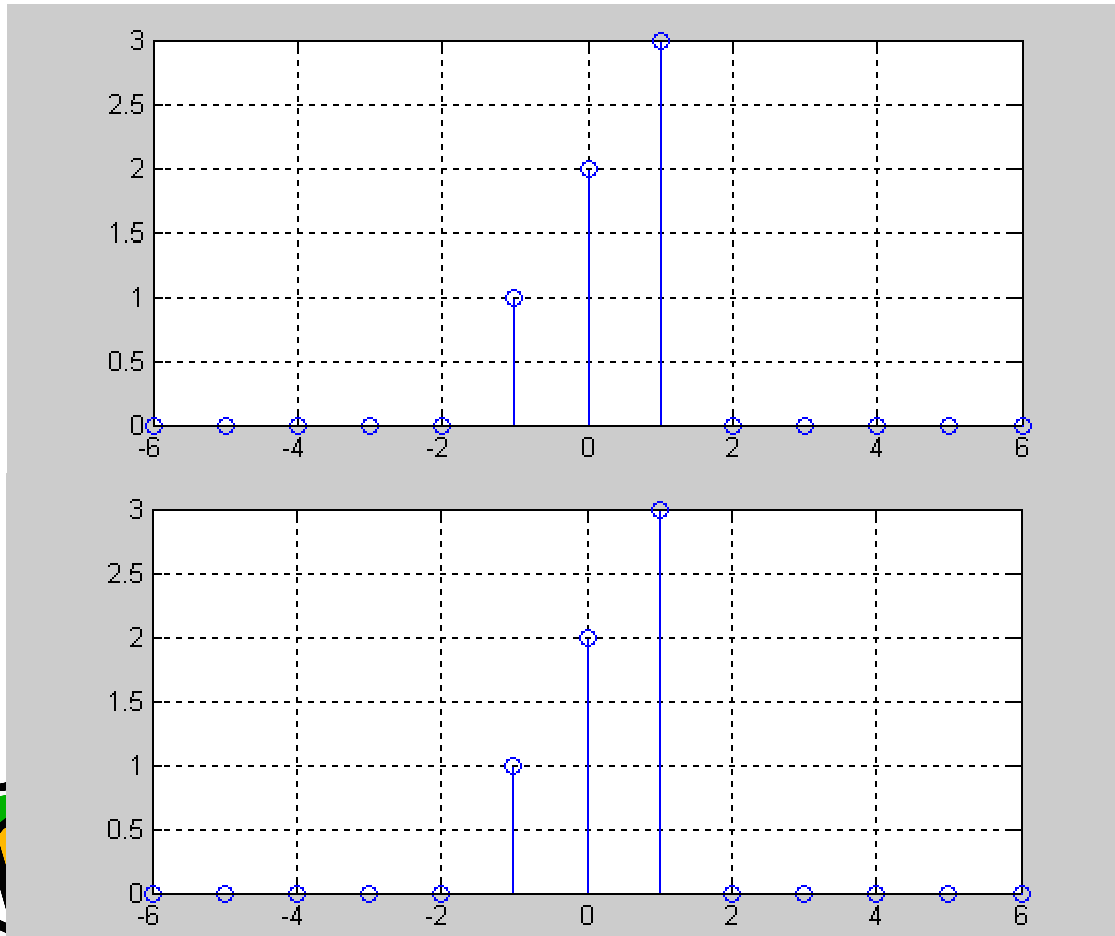
- x=[1 2 3]





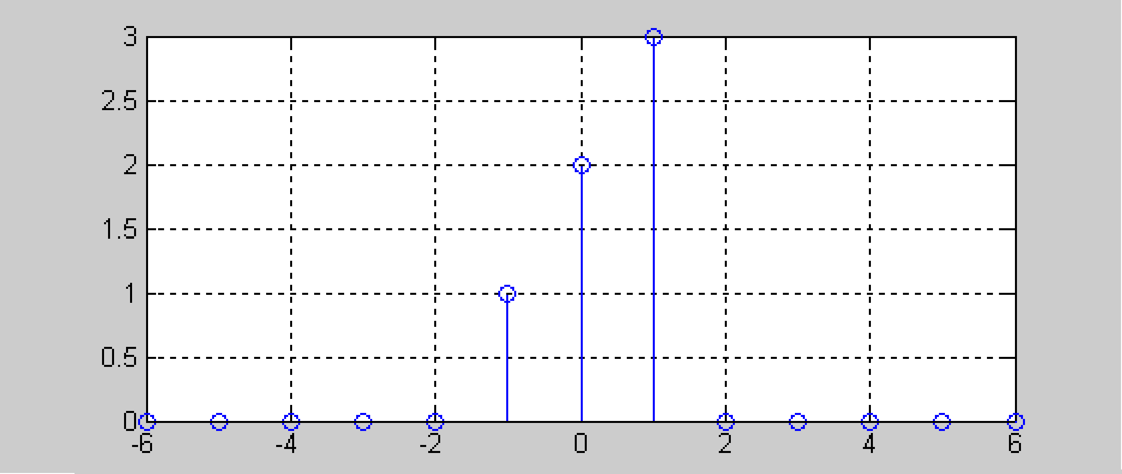
Example: Rxx

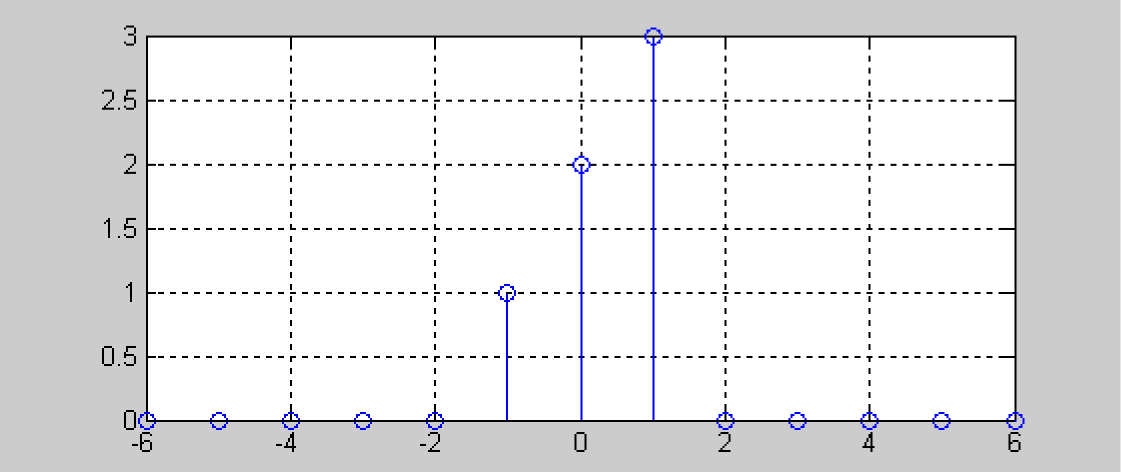
- $x=[1\ \underline{2}\ 3]$



Example: Rxx

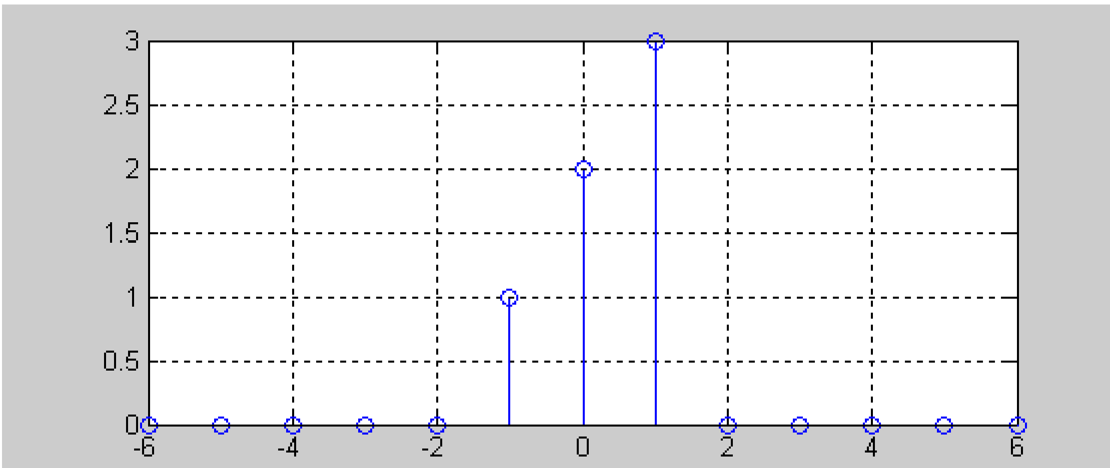
- x=[1 <u>2</u> 3]

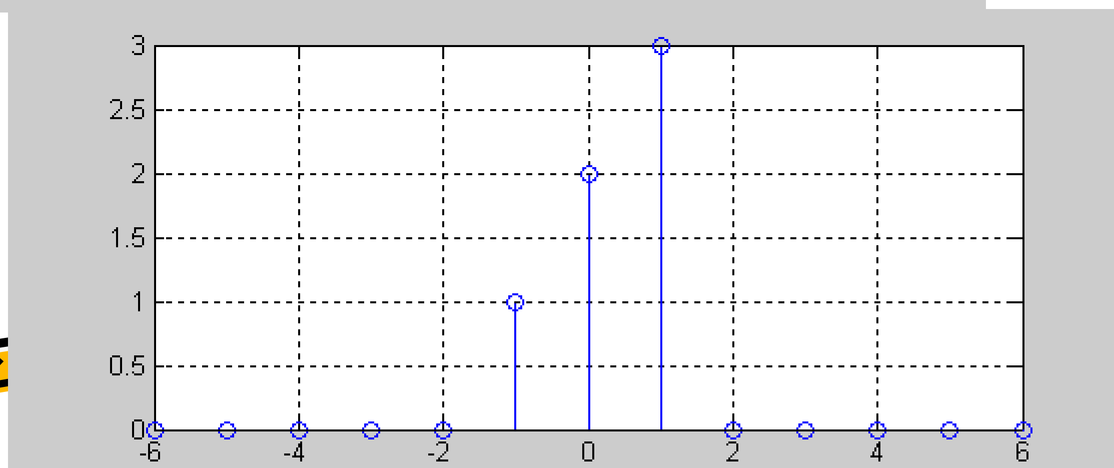




Example: Rxx

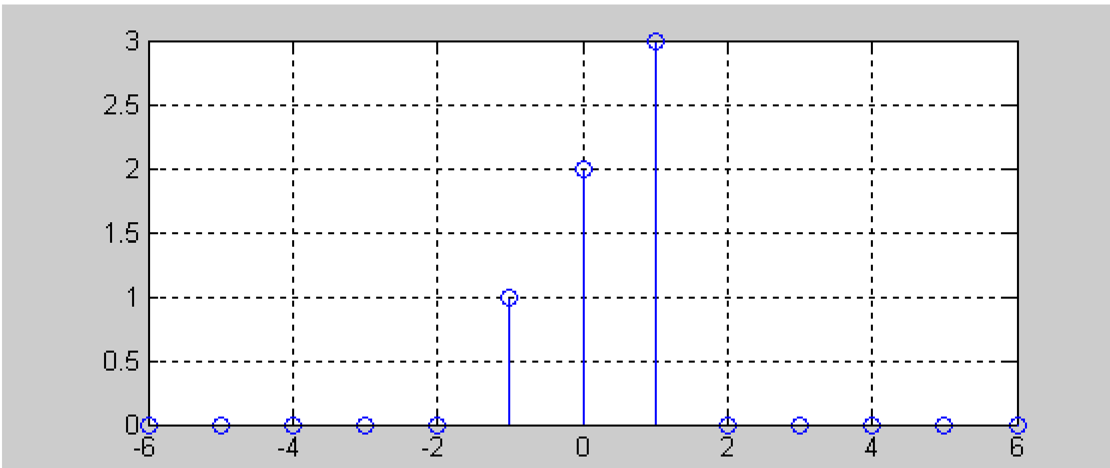
- $x=[1\ \underline{2}\ 3]$

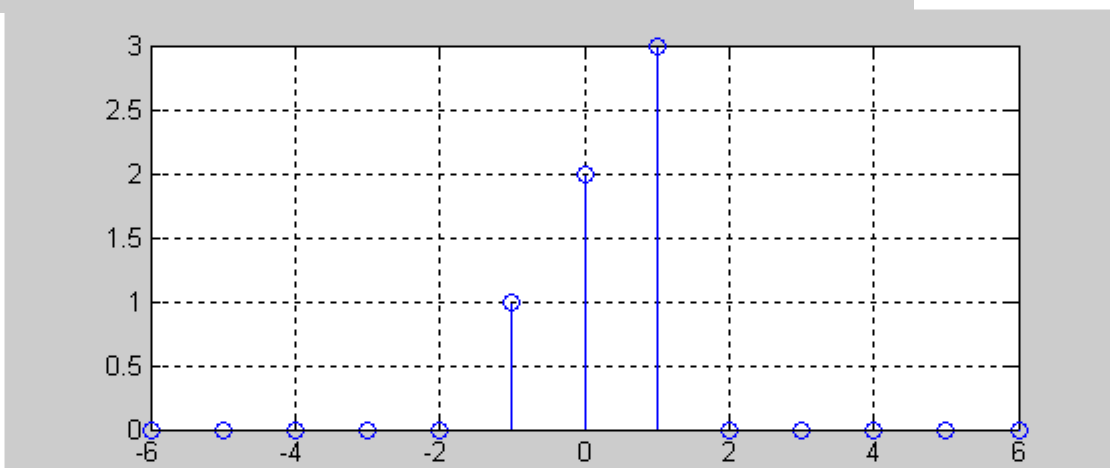




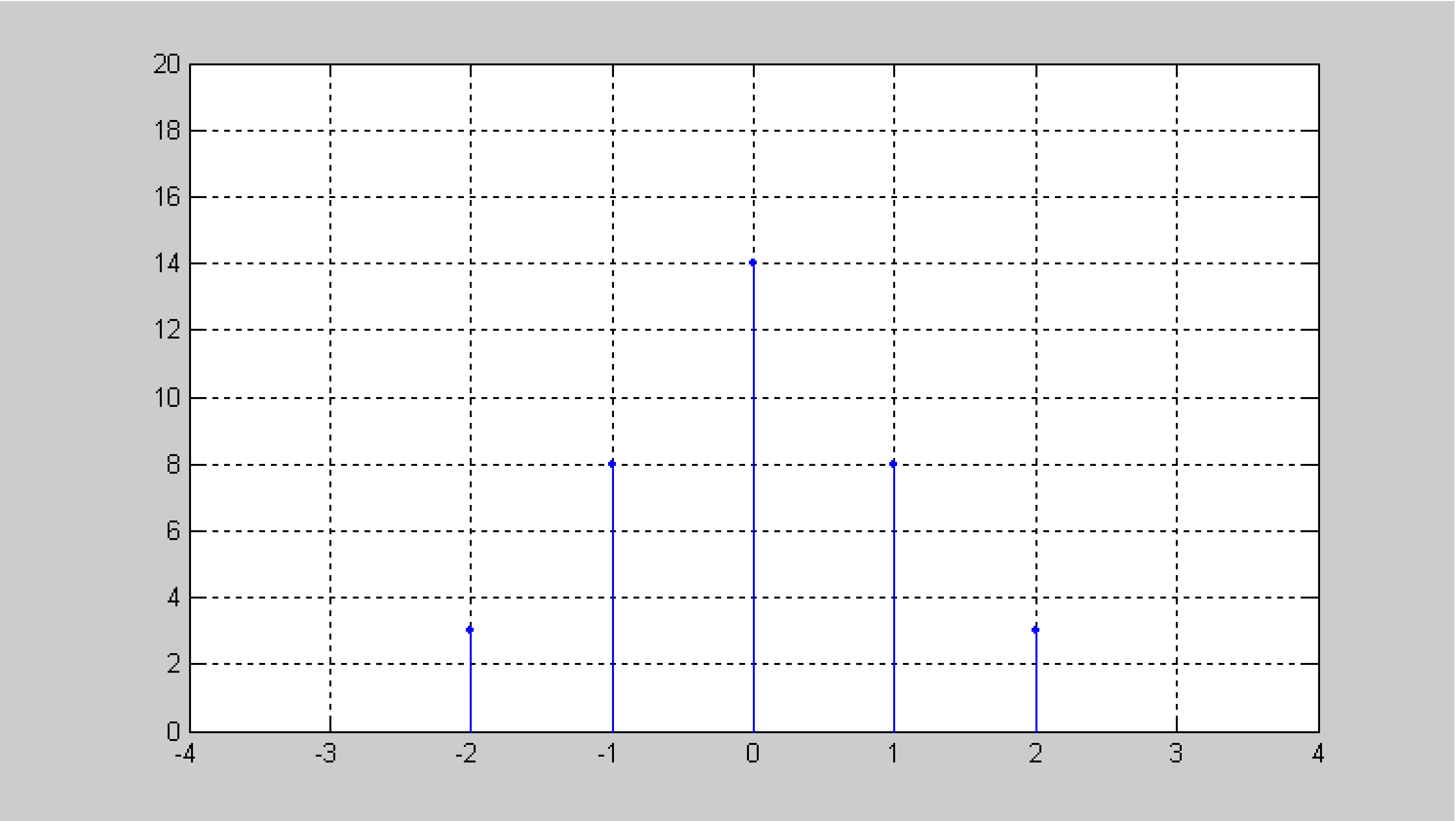
Example: Rxx

- $x=[1\ \underline{2}\ 3]$



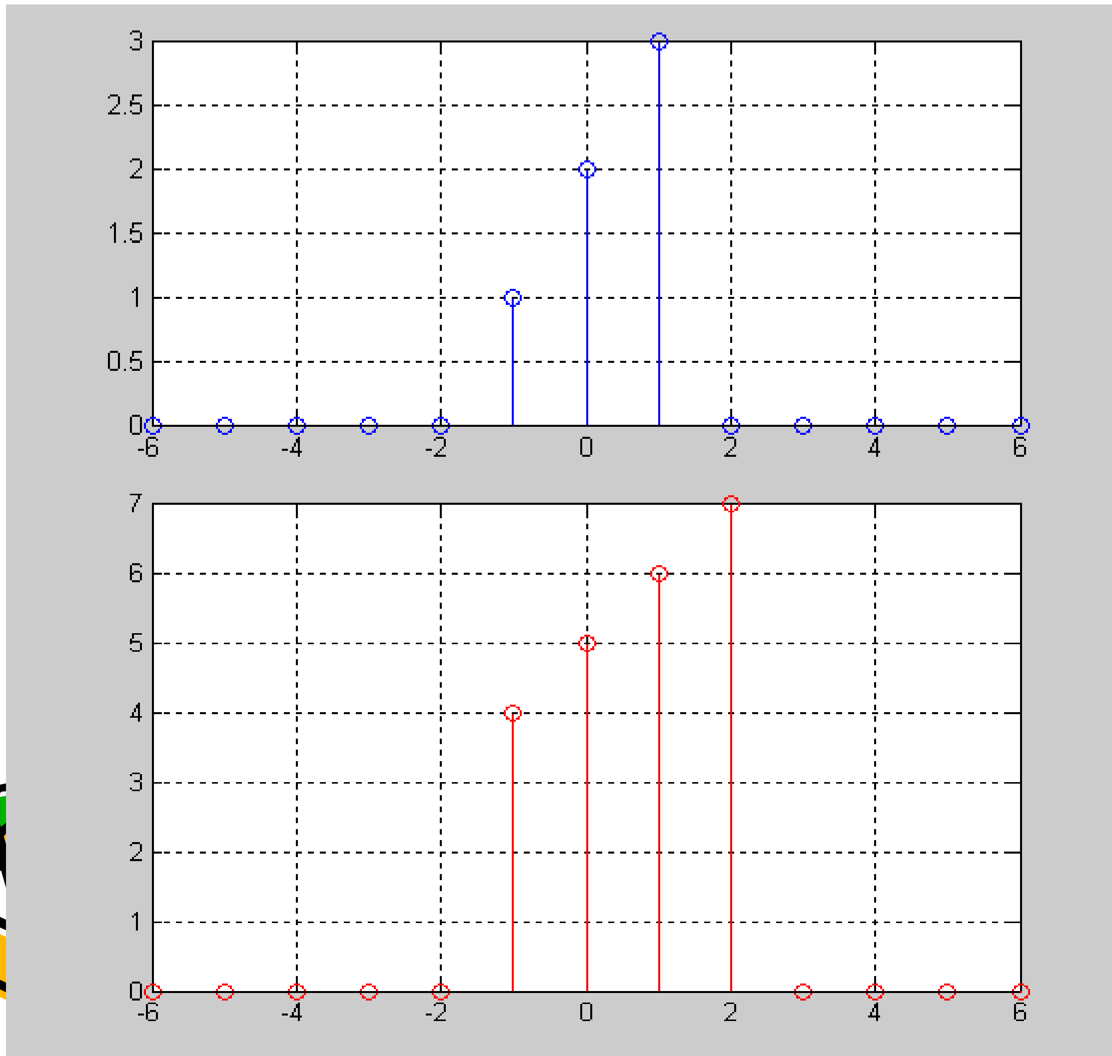


Rxx(m)



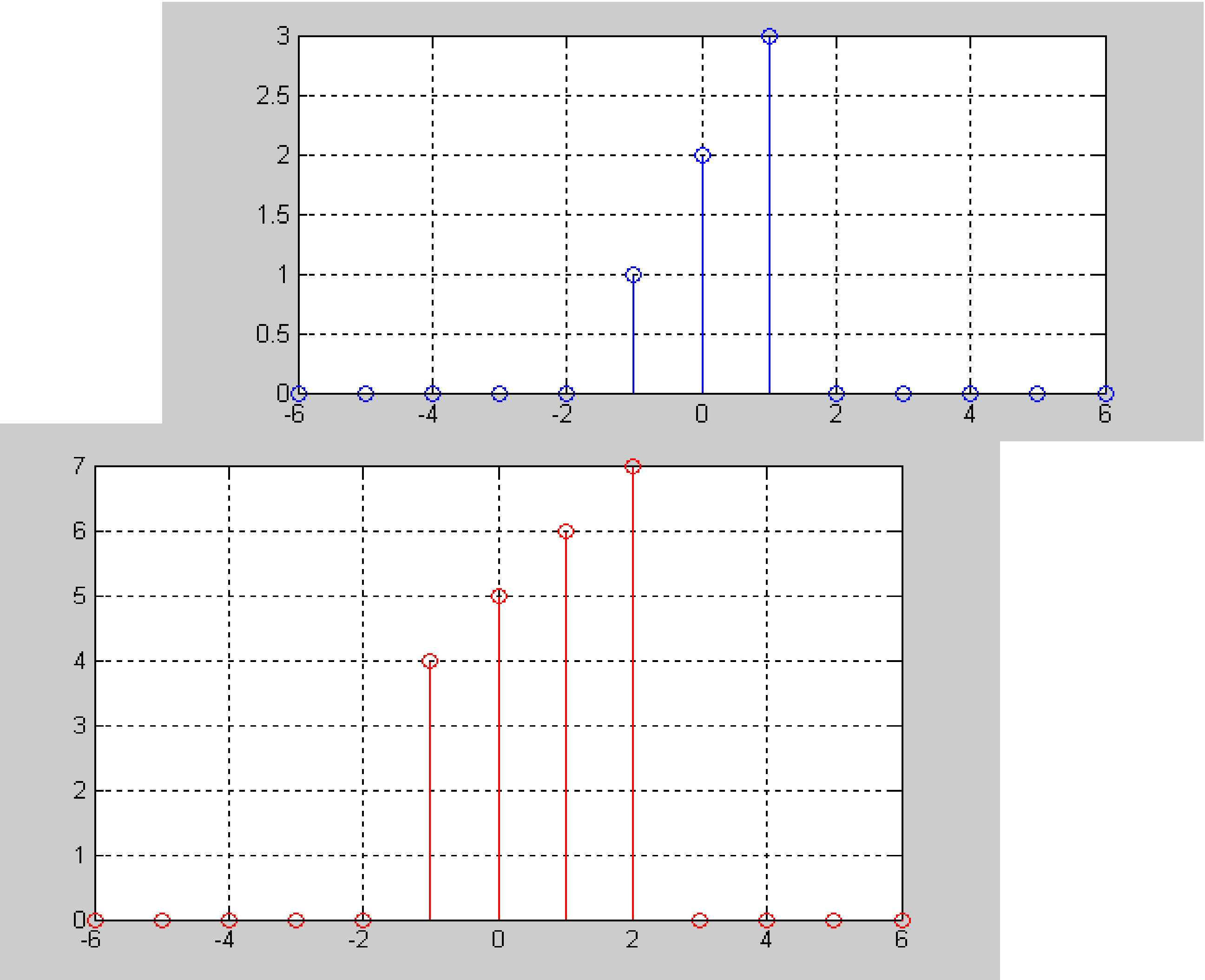
Example: Rxy

- x=[1 $\underline{2}$ 3], y=[4 $\underline{5}$ 6 7]



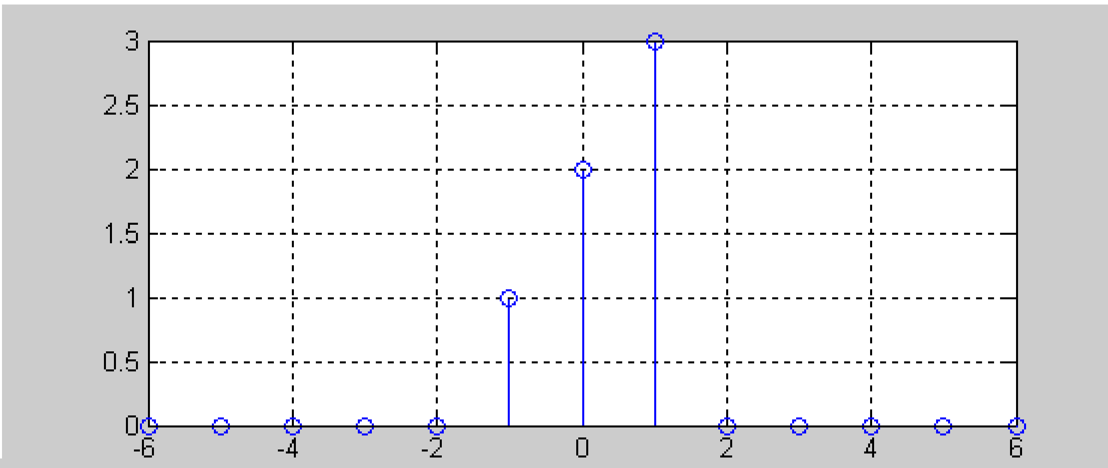
Example: Rxy

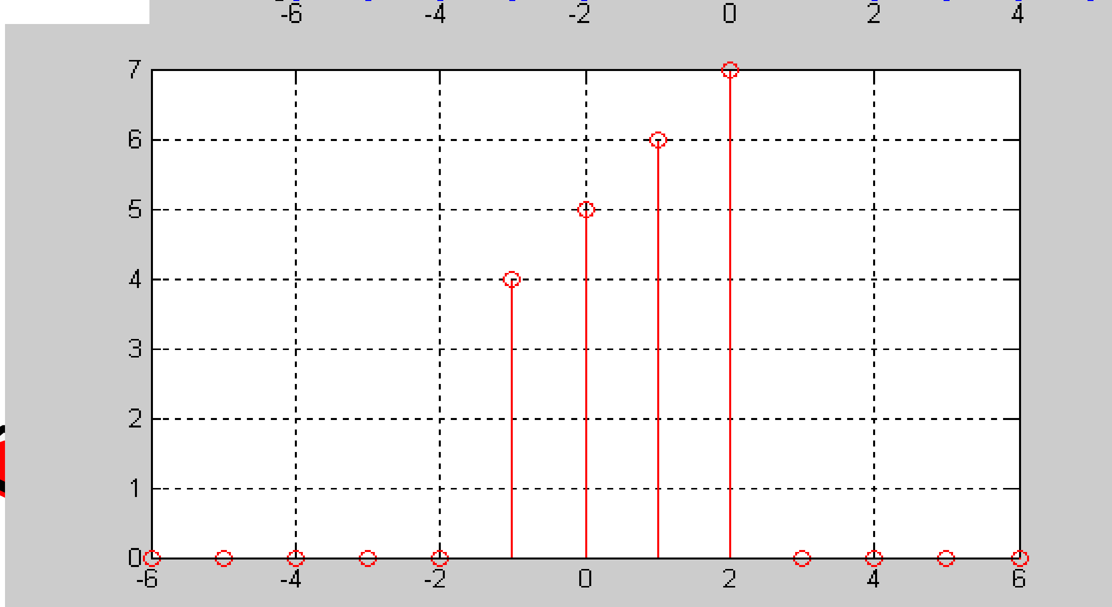
- x=[1 <u>2</u> 3], y=[4 <u>5</u> 6 7]



Example: Rxy

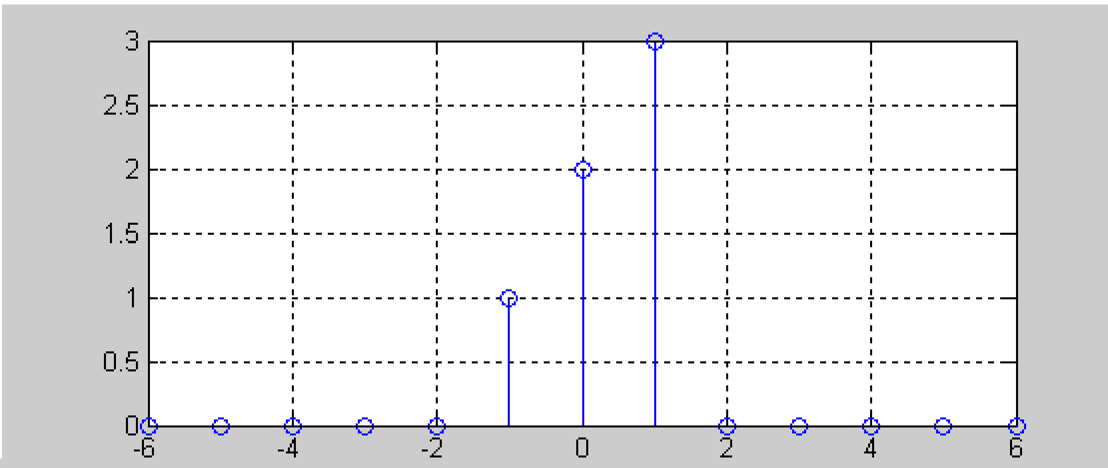
- x=[1 $\underline{2}$ 3], y=[4 $\underline{5}$ 6 7]

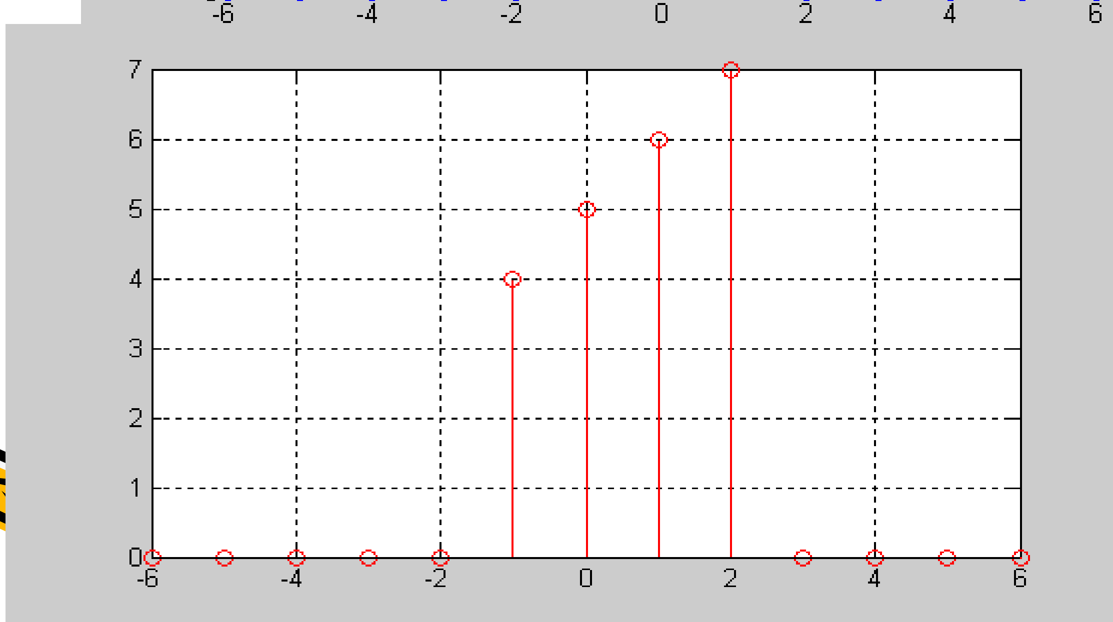




Example: Rxy

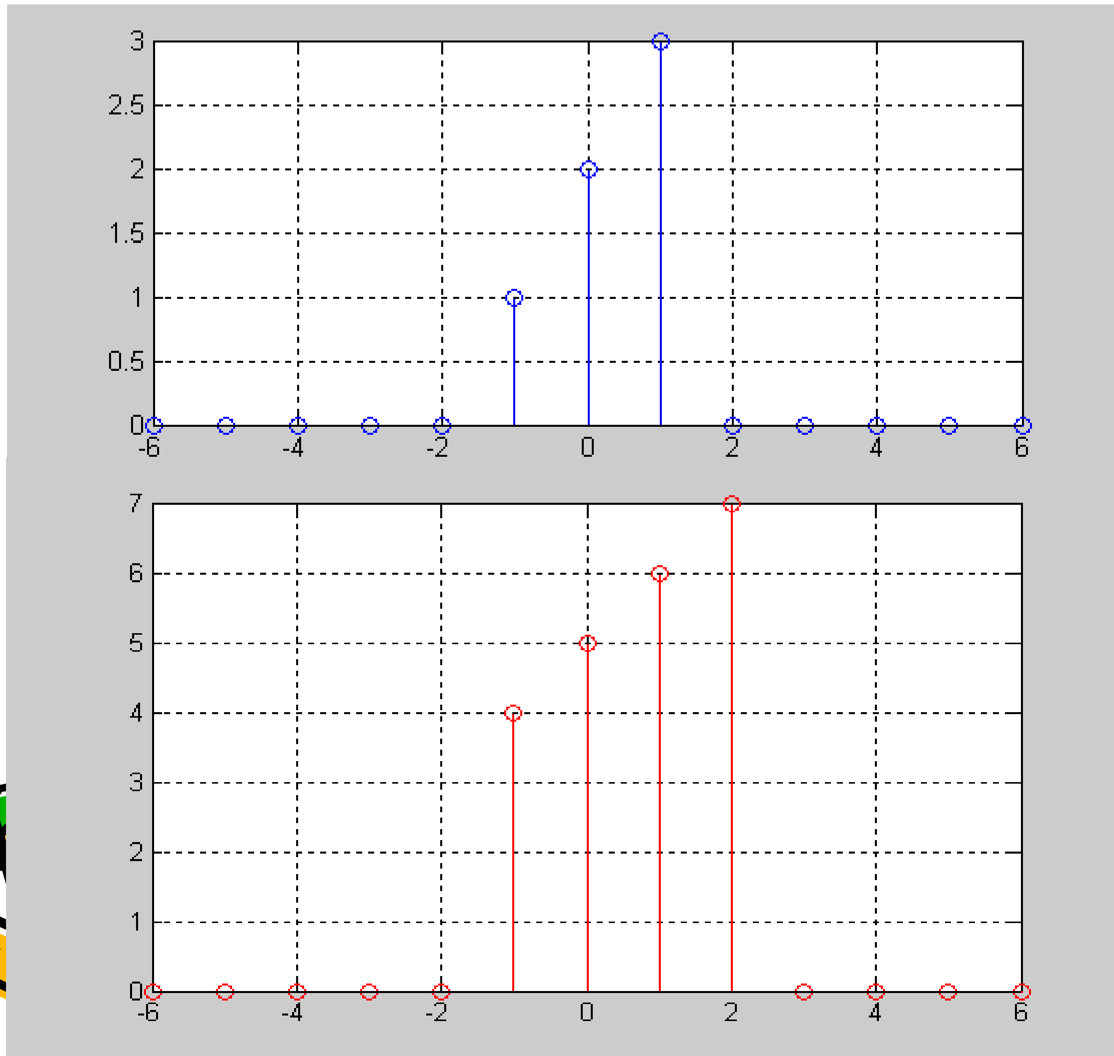
- x=[1 $\underline{2}$ 3], y=[4 $\underline{5}$ 6 7]





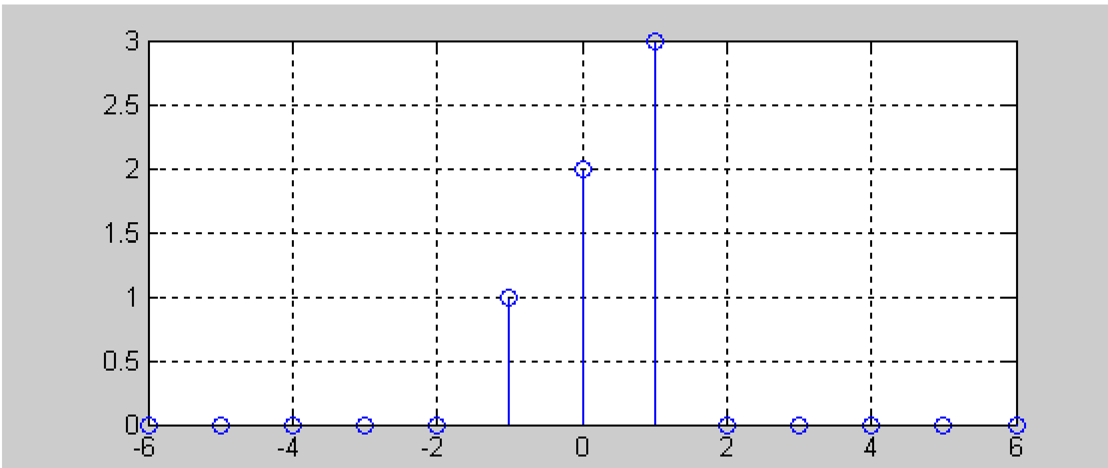
Example: Rxy

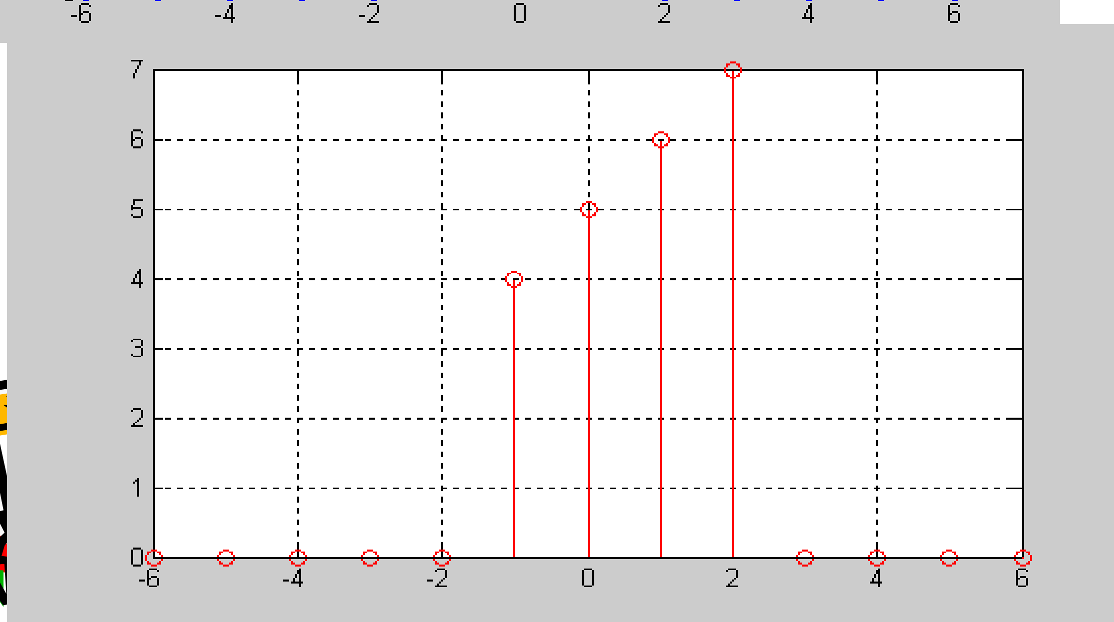
- x=[1 2 3], y=[4 5 6 7]



Example: Rxy

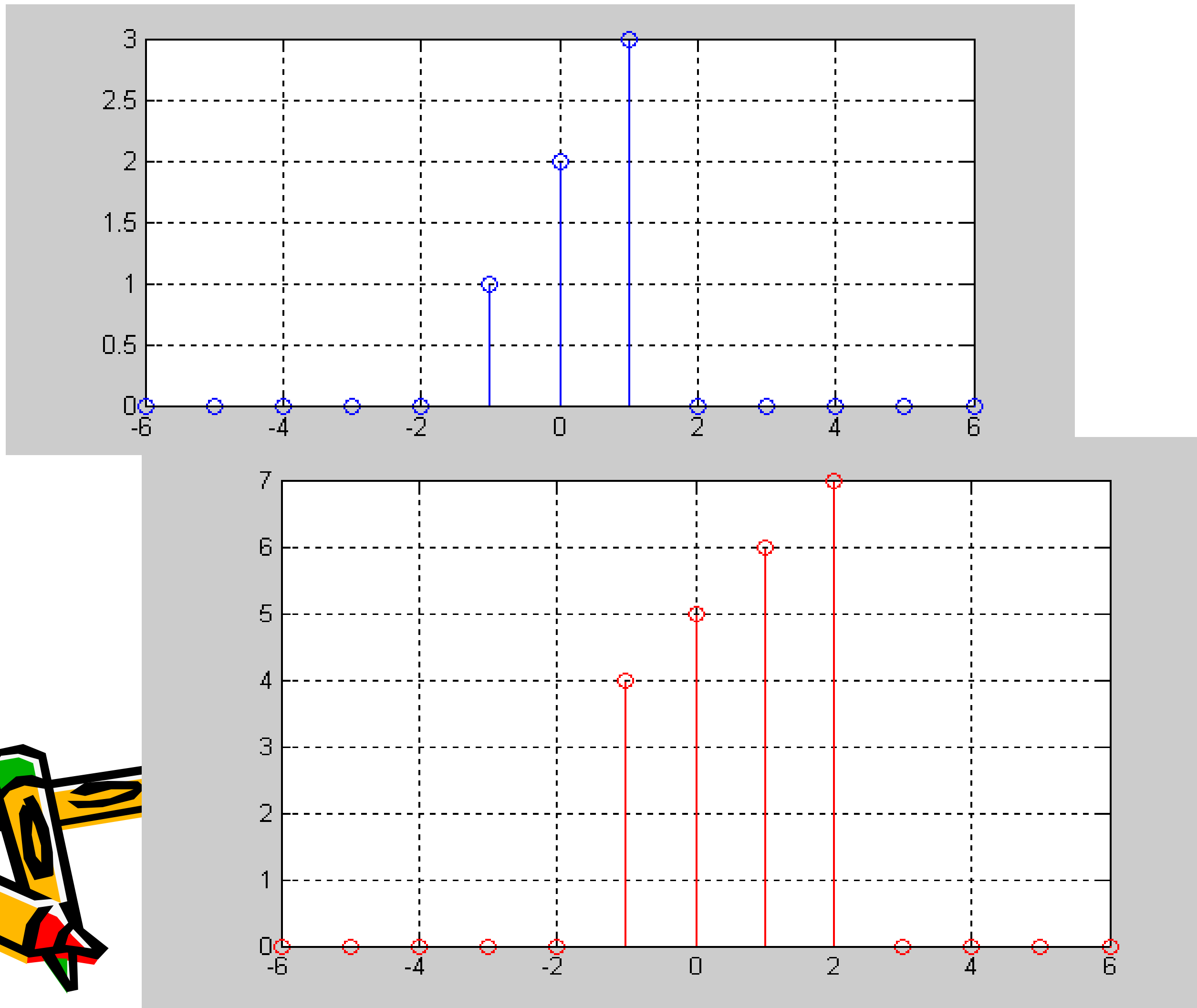
- x=[1 $\underline{2}$ 3], y=[4 $\underline{5}$ 6 7]



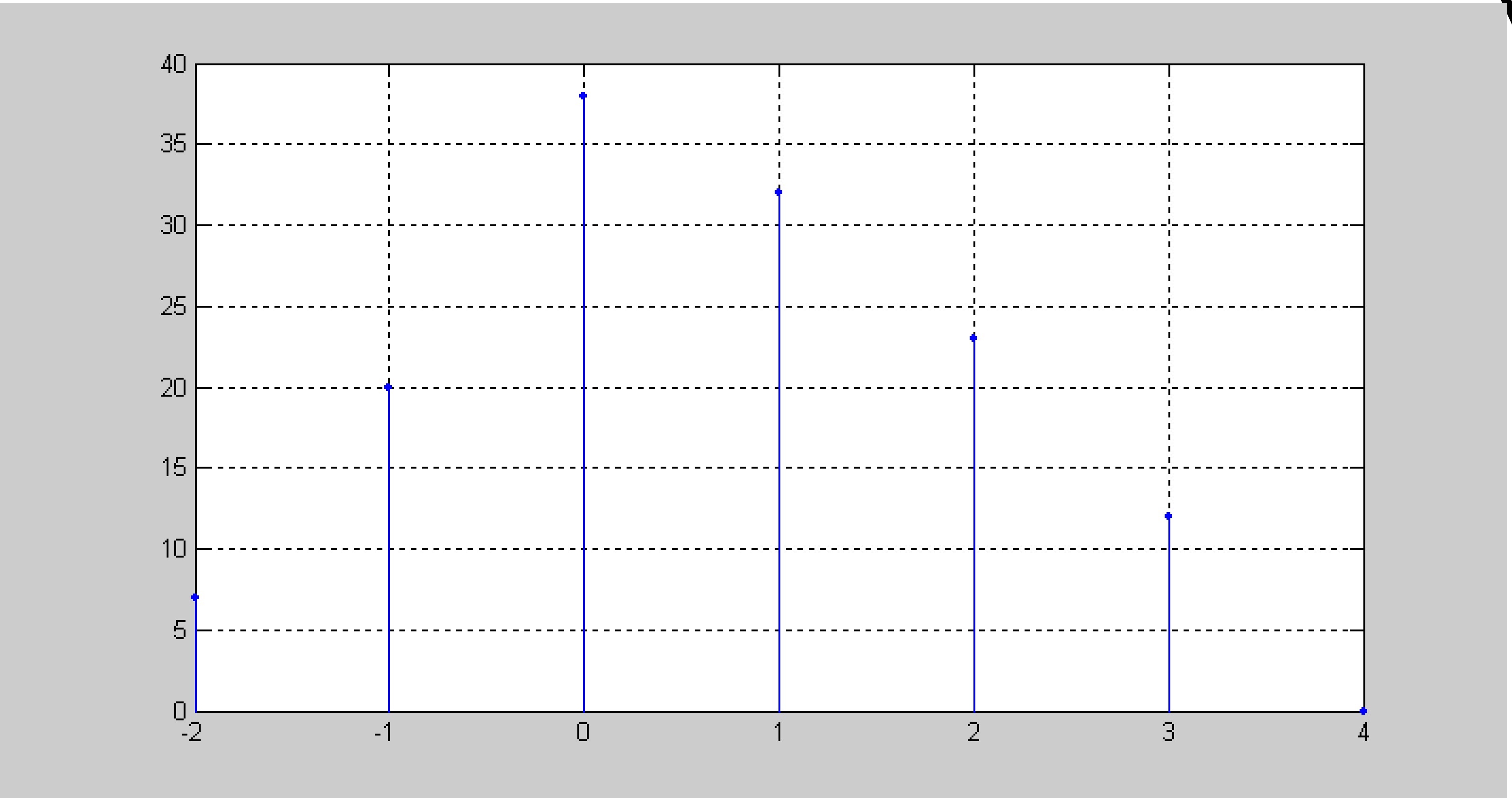


Example: Rxy

- x=[1 2 3], y=[4 5 6 7]



Rxy(m)



End of Week 5

- Download HW 4: Probability
  - ส่งต้นชั่วโมงสัปดาห์หน้า